Omskrivning af en kvadratisk form i 2 variable

Eksemplet er en uddybning af Eksempel 20.1 i eNote nr. 20

NB: Når du kører Maple-filen med !!! vil der ske det, at resultatet i ligning 8 kan komme ud på forskellige måde.
Det kan betyde, at de 2 egenværdier er ombyttet, og egenvektorerne har modsatte koordinater!

> *restart*

Transponering af matrix laves som en simpel procedure T:

> $T := \mathbf{proc}(M)\ LinearAlgebra[Transpose](M)\ \mathbf{end\ proc}$:

> $f := (x, y) \rightarrow 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13$

$$f := (x, y) \rightarrow 2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y - 8\,x - 10\,y + 13 \qquad \textbf{(1)}$$

> $VectorCalculus[Jacobian](\langle f(x, y)\rangle, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4\,x + 2\,y - 8 & 2\,x + 4\,y - 10 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

> $VectorCalculus[Hessian](f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

> $H := \frac{1}{2} \cdot \%$

$$H := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

Den kvadratiske form kan så skrives:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

Formlen kontrolleres:

> $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . H . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

$$(2\,x + y)\,x + (x + 2\,y)\,y - 8\,x - 10\,y + 13 \qquad \textbf{(5)}$$

> $expand(\%)$

$$2\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,y^2 - 8\,x - 10\,y + 13 \qquad \textbf{(6)}$$

Hvilket præcist er den givne kvadratiske form f.

Nu skal H diagonaliseres:

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](H)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](H, output='list')$

$$\left[\left[1, 1, \left\{\left[\begin{array}{c}-1 \\ 1\end{array}\right]\right\}\right], \left[3, 1, \left\{\left[\begin{array}{c}1 \\ 1\end{array}\right]\right\}\right]\right] \quad \textbf{(8)}$$

Egenværdierne pilles ud:

> $e1 := \textbf{(8)}[1, 1]$

$$e1 := 1 \quad \textbf{(9)}$$

> $e2 := \textbf{(8)}[2, 1]$

$$e2 := 3 \quad \textbf{(10)}$$

Egenrummene står vinkelret på hinanden i følge teorien.

Egenvektorerne pilles ud og gøres til enhedsvektorer:

> $v1 := \textbf{(8)}[1, 3, 1]$

$$v1 := \left[\begin{array}{c}-1 \\ 1\end{array}\right] \quad \textbf{(11)}$$

> $v1 := \frac{v1}{\sqrt{v1 \cdot v1}}$

$$v1 := \left[\begin{array}{c}-\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{array}\right] \quad \textbf{(12)}$$

> $v2 := \textbf{(8)}[2, 3, 1]$

$$v2 := \left[\begin{array}{c}1 \\ 1\end{array}\right] \quad \textbf{(13)}$$

> $v2 := \frac{v2}{\sqrt{v2 \cdot v2}}$

$$v2 := \left[\begin{array}{c}\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{array}\right] \quad \textbf{(14)}$$

Diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen:

> $\Lambda := \left[\begin{array}{cc}e1 & 0 \\ 0 & e2\end{array}\right]$

$$\Lambda := \left[\begin{array}{cc}1 & 0 \\ 0 & 3\end{array}\right] \quad \textbf{(15)}$$

Ortogonale substitutionsmatrix:

> $Q := \langle v1 | v2 \rangle$

$$Q := \left[\begin{array}{cc}-\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{array}\right] \quad \textbf{(16)}$$

Hvis determinanten er -1, ombyttes søjlerne i Q (og egenvektorerne ombyttes):

> $LinearAlgebra[Determinant](Q)$

$$-1 \qquad (17)$$

> if $LinearAlgebra[Determinant](Q) = -1$ then $Q := \langle v2|v1\rangle$; $v := v2$; $v2 := v1$; $v1 := v$; end if:

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x_1, y_1)

I formlen $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$ **skal** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **erstattes af** $Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right)^T \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot (Q^T \cdot H \cdot Q) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9\cdot\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9\cdot\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$3\cdot x_1^2 + y_1^2 - 9\cdot\sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1 + 13 =$$

Altså er vi sluppet af med det blandede 2. grads led, som hedder $2\cdot x\cdot y$

$$3\cdot x_1^2 + y_1^2 - 9\cdot\sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1 + 13 =$$

$$3\cdot\left(x_1^2 - 3\cdot\sqrt{2}\cdot x_1\right) + \left(y_1^2 - \sqrt{2}\cdot y_1\right) + 13 =$$

$$3\cdot\left(\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2\right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2\right) + 13 =$$

$$3\cdot\left(\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{9}{2}\right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) + 13 =$$

$$3\cdot\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{27}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 13 =$$

$$3\cdot\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - 1 =$$

$$\left(\frac{x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}{1}\right)^2 - 1$$

Dvs. $f(x, y) = 0$ er en ellipse med halvakserne $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1.

Som forventet giver $Q^T \cdot H \cdot Q$ diagonalmatricen Λ :

> $T(Q).H.Q$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

1. grads leddet udregnes:

> $\begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.Q$

$$\begin{bmatrix} -9\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{19}$$

I den kvadratiske form: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}.H.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

erstattes de gamle koordinater (x, y) med nye koordinater $(x1, y1)$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}$

> $T\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right).H.\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right) + 13 = 0$

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right) + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right) - 9\sqrt{2}\,x1 - \sqrt{2}\,y1 + 13 = 0 \tag{20}$$

> $simplify(\%)$

$$3\,x1^2 + y1^2 - 9\sqrt{2}\,x1 - \sqrt{2}\,y1 + 13 = 0 \tag{21}$$

> $Student[Precalculus][CompleteSquare](\%)$

$$\left(y1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 3\left(x1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 0 \tag{22}$$

Ellipsens centrum er $C1 = (x1_0, y1_0) = \left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ i de nye koordinater!

I gamle koordinater ligger centrum i punktet $C = (1, 2)$:

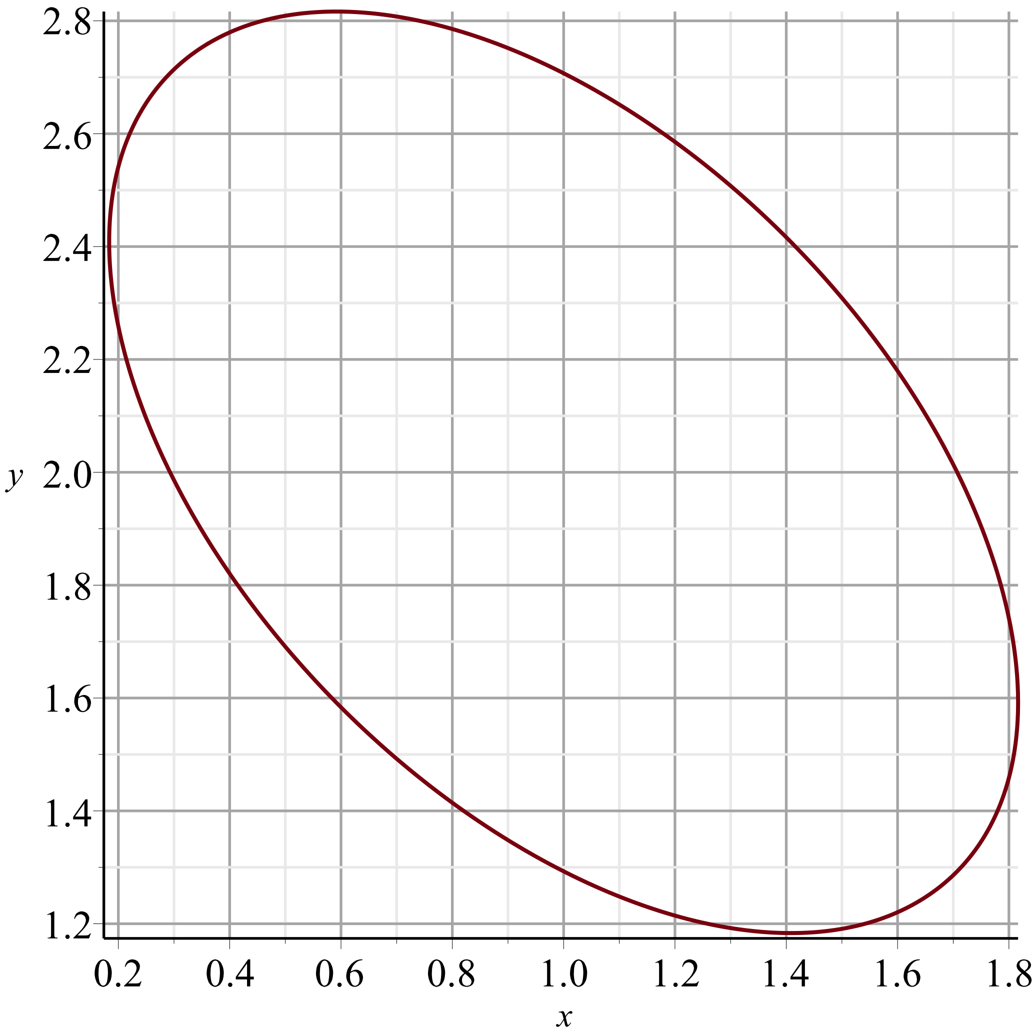
> $C := Q.\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Ellipsen plottes:

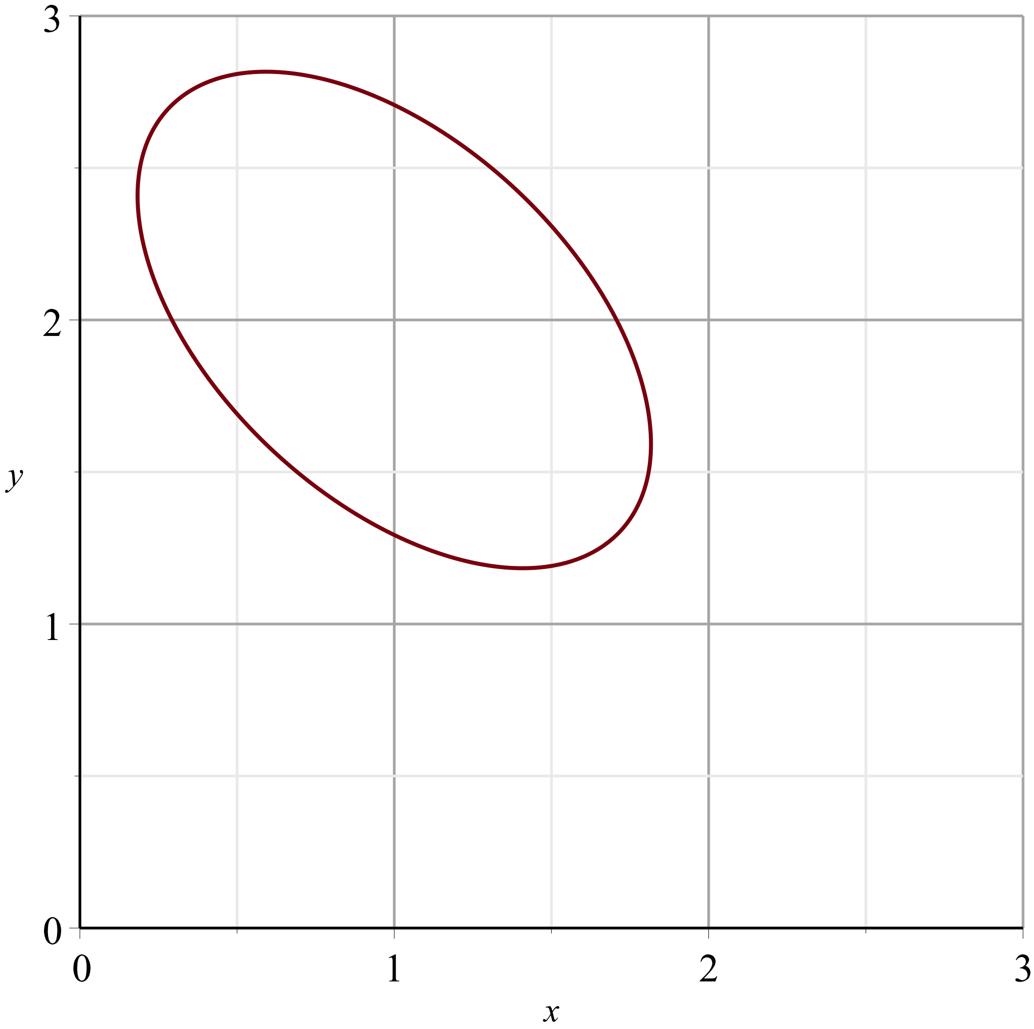
> $with(plots)$:

> $implicitplot\left(2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot x\cdot y - 8\cdot x - 10\cdot y + 13 = 0, x = 0 ..2, y = 1 ..3, numpoints = 100000, gridlines\right)$



Origo bør ses på plottet:

> $implicitplot\left(2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot x\cdot y - 8\cdot x - 10\cdot y + 13 = 0, x = 0\,..2, y = 1\,..3, numpoints = 100000, view = [0\,..3, 0\,..3], gridlines\right)$



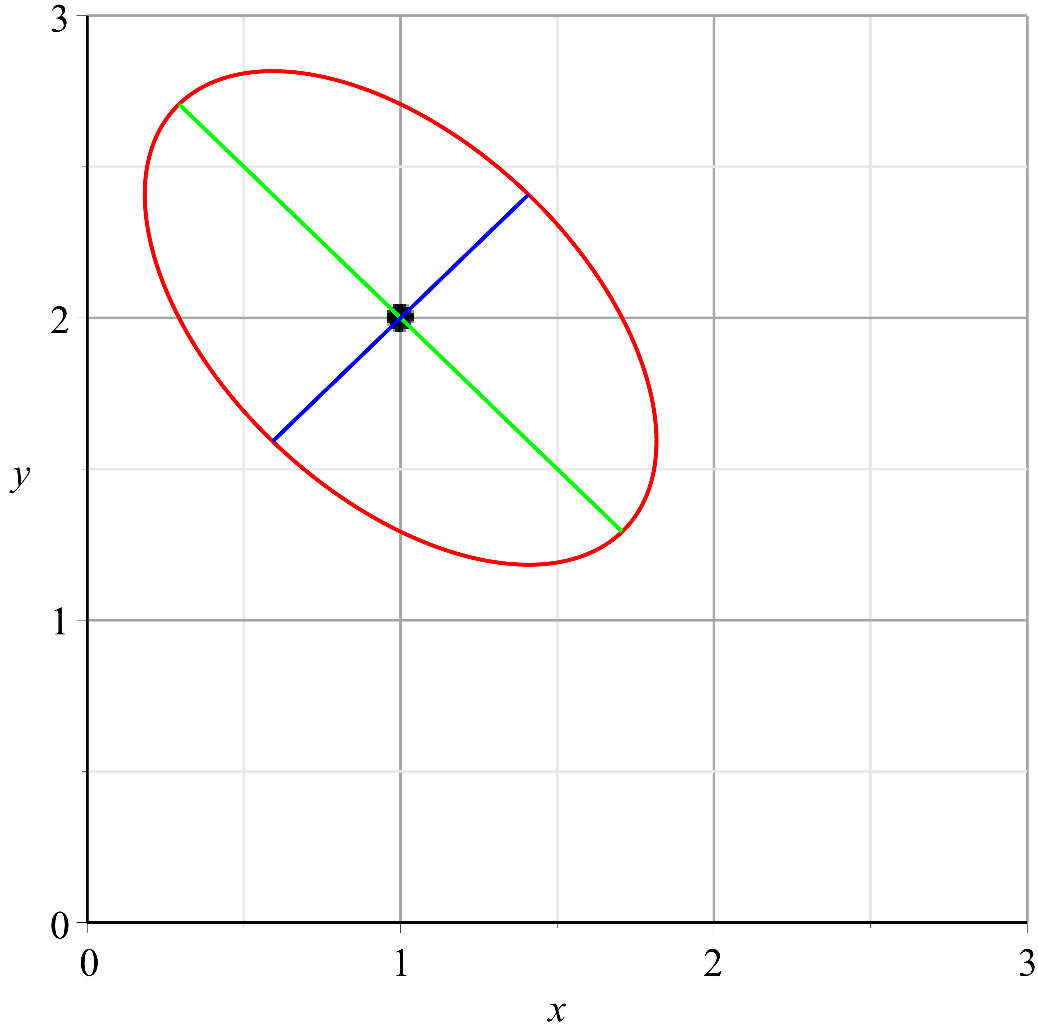
Centrum ligger i $C = (1, 2)$.
Halvakserne går gennem centrum, og følger de nye koordinatakser!

Længden af halvakserne er fundet ovenfor som $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1.

Halvakserne tegnes med en parameterfremstilling for et ret linjestykke.

Ellipsen tegnes med centrum og halvakser:

> $ellipse := implicitplot\left(2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 = 0, x = 0..2, y = 1..3, numpoints = 100000, color = red\right):$
> $centrum := pointplot([1], [2], symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = black):$
> $lilleakse := plot\left(\left[C_1 + t \cdot v1_1, C_2 + t \cdot v1_2, t = -\frac{\sqrt{3}}{3} .. \frac{\sqrt{3}}{3}\right], color = blue\right):$
> $storakse := plot\left(\left[C_1 + t \cdot v2_1, C_2 + t \cdot v2_2, t = -1..1\right], color = green\right):$
> $display(ellipse, centrum, storakse, lilleakse, view = [0..3, 0..3], gridlines)$


3
2
1
0
y
0
1
2
3
x