Eksempel på funktion af 2 variable, som har egentligt lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo, men som ikke har lokalt minimum i origo!

Eksemplet er hentet fra side 122 i bogen "Counterexamples in Analysis":
http://books.google.com/books?id=cDAMh5n4lkkC&printsec=frontcover&hl=da&source=gbs_navlinks_s#v=onepage&q=&f=false

13. A differentiable function of two variables possessing no extremum at the origin but for which the restriction to an arbitrary line through the origin has a strict relative minimum there.

The function

$$f(x, y) \equiv (y - x^2)(y - 3x^2)$$

has no relative extremum at the origin since there are points of the form $(0, b)$ arbitrarily near the origin at which f is positive, and also points of the form $(a, 2a^2)$ arbitrarily near the origin at which f is negative. If the domain of f is restricted to the x axis, the restricted function $3x^4$ has a strict absolute minimum at $x = 0$. If the domain of f is restricted to the y axis, the restricted function y^2 has a strict absolute minimum at $y = 0$. If the domain of f is restricted to the line $y = mx$ through the origin where $0 < |m| < +\infty$, the restricted function of the parameter x:

$$g(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$$

has a strict relative minimum at the origin since $g'(0) = 0$ and $g''(0) = 2m^2 > 0$.

> *restart*

> *with(plots) : with(plottools) :*

> $f := (x, y) \rightarrow (y - x^2) \cdot (y - 3 \cdot x^2)$

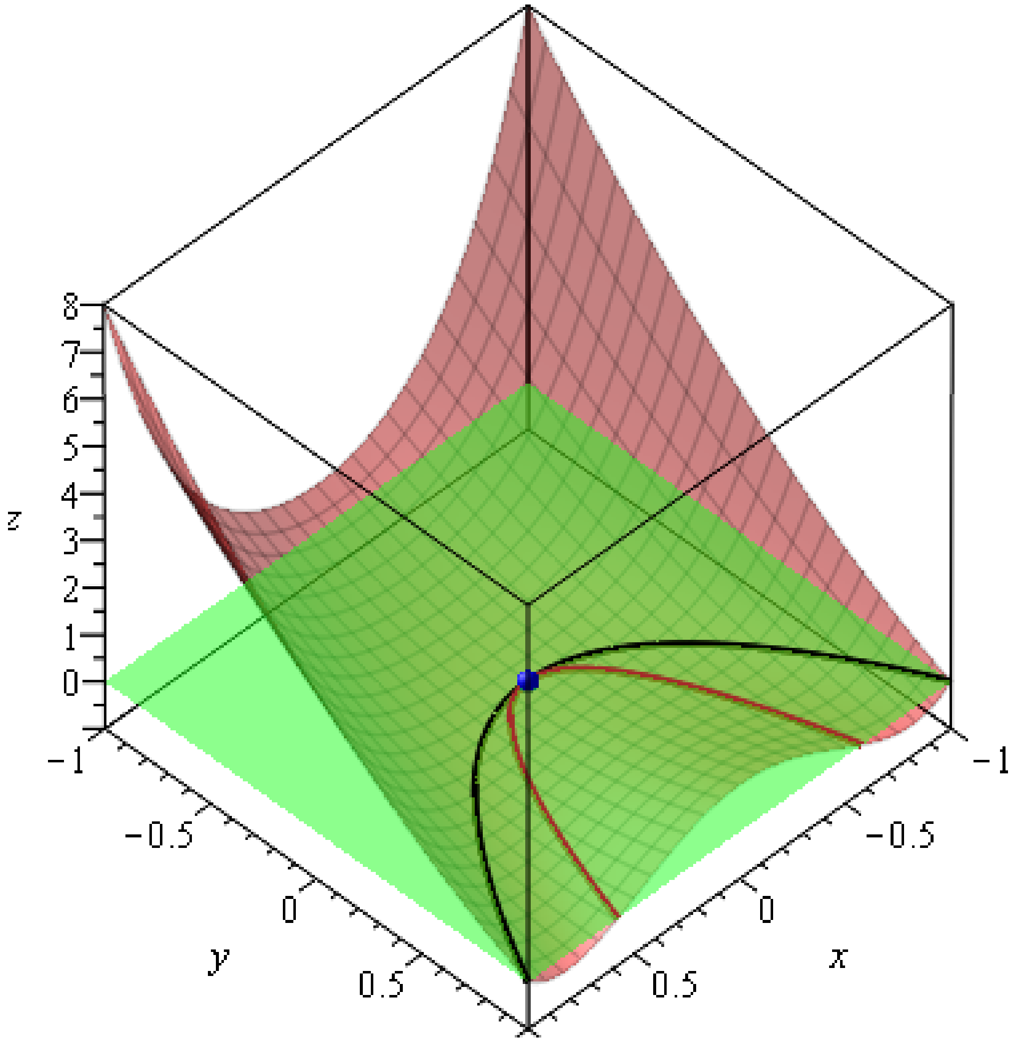
$$f := (x, y) \rightarrow (y - x^2)\,(y - 3\,x^2) \qquad (1)$$

Ikke lokalt minimum i origo

Grafisk bevis

> $graf := plot3d(f(x, y), x = -1\,..1, y = -1\,..1, axes = boxed, labels = [x, y, z], color = red, transparency = 0.5) :$
> $gulv := implicitplot3d(z = 0, x = -1\,..1, y = -1\,..1, z = -1\,..1, color = green, transparency = 0.5, style = patchnogrid) :$

$parabel1 := spacecurve(\langle t, t^2, 0\rangle, t=-1..1, color=black, thickness=3)$:
$parabel2 := spacecurve\left(\langle t, 3\cdot t^2, 0\rangle, t=-\frac{1}{\sqrt{3}}..\frac{1}{\sqrt{3}}, color=brown, thickness=3\right)$:
$origo := point([0, 0, 0], color=blue, symbol=solidsphere, symbolsize=20)$:
$display(graf, gulv, parabel1, parabel2, origo)$



Grafisk ses det tydeligt, når man drejer på figuren, at der IKKE er lokalt minimum i origo!

På de 2 parabler er funktionen 0, mens den er negativ mellem de 2 parabler. Ellers er funktionen positiv.

Korrekt bevis

For at bevise det, ser man på 2 måder at nærme sig origo.
Dels på en parabel $y=2\cdot x^2$, som ligger imellem de 2 tegnede, dels på den rette linje $y=0$.

> $g := x \rightarrow f(x, 2\cdot x^2)$:

> $g(x)$

$$-x^4 \tag{1.2.1}$$

Det er tydeligt, at funktionen er **negativ** på hele parablen $y=2\cdot x^2$ pånær i origo, hvor funktionen er 0.

> $h := x \rightarrow f(x, 0)$:

> $h(x)$

$$3\,x^4 \tag{1.2.2}$$

Det er tydeligt, at funktionen er **positiv** på hele den rette linje $y = 0$ pånær i origo, hvor funktionen er 0.

Hermed er det bevist, at $f(x, y)$ IKKE har lokalt minimum i origo.

Lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo

Ser på restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$ gennem origo (NB: $a \in \mathbb{R}$).
Udtrykket inkluderer ikke den lodrette linje $x = 0$, som skal specialundersøges.

Lodret linje

> $i := y \rightarrow f(0, y)$:

> $i(y)$

$$y^2 \tag{2.1.1}$$

Det ses tydeligt, at der er egentligt lokalt minimum i origo, når man tager restriktionen til den lodrette linje $x = 0$ gennem origo.

Generel linje

> $j := x \rightarrow f(x, a \cdot x)$:

> $j(x)$

$$(a\,x - x^2)\,(a\,x - 3\,x^2) \tag{2.2.1}$$

> $j(0)$

$$0 \tag{2.2.2}$$

> $factor(j(x))$

$$x^2\,(a - x)\,(a - 3\,x) \tag{2.2.3}$$

> $solve(j(x) = 0, x)$

$$a, \frac{1}{3}\,a, 0, 0 \tag{2.2.4}$$

$a = 0$ (vandret linje)

Antag, at $a = 0$:

> $subs(a = 0, j(x))$

$$3\,x^4 \tag{2.2.1.1}$$

Funktionen har tydelig egentligt lokalt minium i origo for restriktionen til den rette linje $y = 0$.

$a > 0$ (positiv hældningskoefficient)

Antag at $a > 0$:
Da $a > 0$, er 2 af rødderne *positive*.
Der er 3 forskellige rødder: 0 , $\frac{1}{3} \cdot a$ og a .
0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0.
Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.

Da $a > 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $]-\infty; 0[$ og $\left]0 ; \frac{1}{3} \cdot a\right[$.

Derfor er der egentligt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a > 0$.

$a < 0$ (negativ hældningskoefficient)

Antag at $a < 0$:

Da $a < 0$, er 2 af rødderne negative.

Der er 3 forskellige rødder: a , $\frac{1}{3} \cdot a$ og 0 .

0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0.

Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.

Da $a < 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $\left]\frac{1}{3} \cdot a ; 0\right[$ og $]0 ; \infty[$.

Derfor er der egentligt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a < 0$.

Generelt kan man sige, at - bortset fra den lodrette og den vandrette linje - vil **origo være minimum i intervallet $\left]-\frac{1}{3} \cdot |a|, \frac{1}{3} \cdot |a|\right[$** .