

## Uge05 LD E14, opgave 2b

Løs ligningssystemet:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + a \cdot x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + a \cdot x_3 = 1 \end{cases}$$

**Opgaven er helt central.**

Den er svær og forudsætter både teori fra matematikken og erfaring med Maple.

**VIGTIGT: Når der indgår en parameter (her  $a$ ) i ligningssystemet, skal man være meget omhyggelig ved løsningen.**

**Maples rutiner "LinearSolve" og "ReducedRowEchelonForm" tager ikke hensyn til, at opgaven kan få et andet udfald i visse specieltilfælde!**

Det er overladt til opgaveløseren.

> restart

> with(LinearAlgebra) :

Koefficientmatricen opskrives:

$$> A := \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \quad (1)$$

Højresiden opskrives på matrixform:

$$> b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ligningssystemets totalmatrice opskrives:

> T := <A|b>

$$T := \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

### Metode 1: Løsning ved brug af *ReducedRowEchelonForm*

[Først laves 3 rækkeoperationer, som er gyldige for alle  $a$  :

$\triangleright T1 := \text{RowOperation}(T, [1, 3]);$   
 $T2 := \text{RowOperation}(T1, [2, 1], -1);$   
 $T3 := \text{RowOperation}(T2, [3, 1], -a)$

$$\begin{aligned}
 T1 &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 T2 &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 T3 &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & -a^2+1 & 1-a \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nu er 1. søjle gjort færdig. Et initial-et-tal i 1. række og 0'er nedenunder.

Da vi nu vil dividere med  $a - 1$ , må vi forudsætte at dette tal ikke er 0!

**Antag:  $a \neq 1$ :**

$\triangleright T4 := \text{RowOperation}\left(T3, 2, \frac{1}{a-1}\right);$   
 $T4 := \text{simplify}(T4);$   
 $T5 := \text{RowOperation}(T4, [1, 2], -1);$   
 $T6 := \text{RowOperation}(T5, [3, 2], a-1)$

$$\begin{aligned}
 T4 &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{a-1} & 0 \\ 0 & 1-a & -a^2+1 & 1-a \end{bmatrix} \\
 T4 &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & -a^2+1 & 1-a \end{bmatrix} \\
 T5 &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & -a^2+1 & 1-a \end{bmatrix} \\
 T6 &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & 1-a \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nu er 2. søjle gjort færdig. Et initial-et-tal i 2. række og 0 ovenover og nedenunder.

Matrix-elementet  $-a^2 - a + 2$  på plads 3,3 vil vi gerne ændre til 1 ved en rækkeoperation. Men det forudsætter, at tallet ikke er 0!

$$\text{> solve}(-a^2 - a + 2 = 0, a)$$

$$-2, 1$$

(1.3)

NB: Matricelementet kan udtrækkes som  $T6[3, 3]$ :

$$\text{> solve}(T6[3, 3] = 0, a)$$

$$-2, 1$$

(1.4)

Vi ser altså, at vi ikke kan komme videre umiddelbart med  $a = -2$ .

Vi har bagefter 2 specieltilfælde at undersøge:  $a = 1$  og  $a = -2$ .

**Antag:  $a \neq 1$  og  $a \neq -2$ :**

$$\text{> } T7 := \text{RowOperation}\left(T6, 3, \frac{1}{2 - a^2 - a}\right);$$

$$T7 := \text{simplify}(T7);$$

$$T8 := \text{RowOperation}(T7, [2, 3], 1);$$

$$T9 := \text{RowOperation}(T8, [1, 3], -1 - a);$$

$$T9 := \text{simplify}(T9)$$

$$T7 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{-a^2-a+2} \end{bmatrix}$$

$$T7 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$$

$$T8 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$$

$$T9 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{-1-a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$$

$$T9 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$$

(1.5)

**Delkonklusion:**

Hvis  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ :

En løsning, nemlig  $\begin{bmatrix} \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$

**Antag:  $a = 1$ :**

>  $\text{subs}(a = 1, T)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Nu indgår ingen parameter  $a$ , så er det ufarligt at anvende "ReducedRowOperationForm":

>  $\text{ReducedRowEchelonForm}(\text{subs}(a = 1, T))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

**Delkonklusion:**

**Hvis  $a = 1$  :**

Uendelig mange løsninger givet ved:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  hvor  $t_1 \in \mathbb{R}$  og  $t_2 \in \mathbb{R}$

**Antag:  $a = -2$ :**

>  $\text{subs}(a = -2, T)$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Nu indgår ingen parameter  $a$ , så er det ufarligt at anvende "ReducedRowOperationForm":

>  $\text{ReducedRowEchelonForm}(\text{subs}(a = -2, T))$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

**Delkonklusion:**

**Hvis  $a = -2$ :**

Ingen løsning.

## Samlet konklusion:

Den fuldstændige løsning til ligningssystemet er:

**Hvis  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ :**

Én løsning, nemlig 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$$

**Hvis  $a = -2$ :**

Ingen løsning.

**Hvis  $a = 1$ :**

Uendelig mange løsninger givet ved: 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hvor } t_1 \in \mathbb{R} \text{ og } t_2 \in \mathbb{R}$$

## Metode 2: Når vi har lært om begrebet *determinant*, så løses opgaven lettere

>  $Determinant(A)$

$$a^3 - 3a + 2 \quad (2.1)$$

>  $solve(Determinant(A) = 0, a)$

$$-2, 1, 1 \quad (2.2)$$

Det betyder, at rangen af  $A$  er 3, når  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .  
Og at rangen er  $< 3$ , når  $a = -2$  eller  $a = 1$ .

Den videre løsning må så opdeles i 3 tilfælde!

**Antag, at  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .**

"LinearSolve" kan anvendes uden problemer, da matricen  $A$  er regulær (har determinant  $\neq 0$ ).

>  $LinearSolve(A, b)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Dvs. netop én løsning.

**Antag nu, at  $a = -2$ .**

Så kan systemet igen løses let, idet vi fortæller Maple, at  $a = -2$ :

```
> LinearSolve(subs(a=-2, A), b)
Error, (in LinearAlgebra:-BackwardSubstitute) inconsistent system
```

Dvs. ingen løsning!

**Antag nu, at  $a = 1$ .**

Så kan systemet igen løses let, idet vi fortæller Maple, at  $a = 1$ :

```
> LinearSolve(subs(a=1, A), b)
```

$$\begin{bmatrix} 1 - t_{2,1} - t_{1,1} \\ t_{2,1} \\ t_{1,1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Dvs. uendelig mange løsninger, givet ved 2 frie parametre.

**Konklusion:**

Den fuldstændige løsning til ligningssystemet er:

**Hvis  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ :**

Én løsning, nemlig

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$$
**Hvis  $a = -2$ :**

Ingen løsning.

**Hvis  $a = 1$ :**

Uendelig mange løsninger givet ved:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  hvor  $t_1 \in \mathbb{R}$  og  $t_2 \in \mathbb{R}$

**Lad os undersøge rangen:**

NB: Maple skelner ikke mellem værdierne af  $a$ , som er specielle! Maple påstår her, at rangen altid er 3.

```
> Rank(A);
Rank(T)
```

3

**(2.5)**

>  $\text{Rank}(\text{subs}(a = -2, A));$   
 $\text{Rank}(\text{subs}(a = -2, T))$

2

3

**(2.6)**

>  $\text{Rank}(\text{subs}(a = 1, A));$   
 $\text{Rank}(\text{subs}(a = 1, T))$

1

1

**(2.7)**

Der er altså løsninger, når blot  $a \neq -2$ , idet  $\text{rang}(A) = \text{rang}(T)$ .

Antal variabel  $n = 3$ .

Antal frie variable  $= n - \text{rang}(A)$ .

Idet generelle tilfælde er  $n - \text{rang}(A) = 3 - 3 = 0$ , så der er kun den ene løsning.

Når  $a = 1$  er  $n - \text{rang}(A) = 3 - 1 = 2$ . Løsningen er således 2-dimensionel.