Uge 07 E14, StoreDag, Opgave 4: Baser og koordinater (advanced)

***e* er monomie-basis (standardbasis), ofte betegnet med *m*.**
***a* er basis bestående af P_1, P_2, P_3**
***v* består her af 3 vektorer: Q_1, Q_2, Q_3**

> restart

> with(LinearAlgebra) :

***Q* opskrevet i *a*-basis:**

> $aQ1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}; aQ2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; aQ3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$aQ1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aQ2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aQ3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

> $aQ := \langle aQ1|aQ2|aQ3 \rangle$

$$aQ := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

***Q* opskrevet i *e*-basis:**

> $eQ1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}; eQ2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; eQ3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$eQ1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$eQ2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$eQ3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

> $eQ := \langle eQ1 | eQ2 | eQ3 \rangle$

$$eQ := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad (1.4)$$

Der gælder nu, at: $eMa \cdot aQ1 = eQ1$ og $eMa \cdot aQ2 = eQ2$ og $eMa \cdot aQ3 = eQ3$

Disse 3 ligninger kan omskrives til 1 ligning med matricer: $\boldsymbol{eMa \cdot aQ = eQ}$
(hvor aQ og eQ er 3×3 matricer med de oprindelige vektorer som søjler).
Den ubekendte i matrix-ligningen er $\boldsymbol{eMa}$!

Metode 1: Løser ligningen ved at gange med $(aQ)^{-1}$ på begge sider, og udføre matrixmultiplikation

$eMa \cdot aQ = eQ \Leftrightarrow (eMa \cdot aQ) \cdot (aQ)^{-1} = eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow$
$eMa \cdot \left(aQ \cdot (aQ)^{-1}\right) = eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow eMa \cdot E = eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow eMa = eQ \cdot (aQ)^{-1}$

> $eQ.(aQ)^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad (1.1.1)$$

Konklusion: $\underline{\underline{{}_eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}}}$

Metode 2: Omskriver ligningen med *transponering*, og bruger "LinearSolve"

Den ubekendte i ligningen $eMa \cdot aQ3 = eQ3$ er eMa. Dvs. man kan ikke umiddelbart anvende LinearSolve(A,B)-kommandoen.
LinearSolve(A,B) løser nemlig ligningen: $A \cdot X = B$. Man skal først have flyttet den ubekendte, så den står til højre i matrix-produktet.

Ligningen omskrives til formen "$A \cdot X = B$" ved brug af transponering:

$eMa \cdot aQ = eQ \;\Leftrightarrow\; (eMa \cdot aQ)^T = (eQ)^T \;\Leftrightarrow\; (aQ)^T \cdot (eMa)^T = (eQ)^T \;\Leftrightarrow$
$(aQ)^T \cdot X = (eQ)^T$ hvor $X = (eMa)^T$

Det betyder, at den søgte basisskiftematrix eMa fås som X^T, når ligningen kan løses med "$LinearSolve(A, B)$", hvor $A = (aQ)^T$ og $B = (eQ)^T$

> $Transpose(LinearSolve(Transpose(aQ), Transpose(eQ)))$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

Konklusion: $\underline{\underline{{}_eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}}}$

Metode 3: Omskriver ligningen med *invertering*, og bruger "LinearSolve"

Den ubekendte i ligningen $eMa \cdot aQ3 = eQ3$ er eMa. Dvs. man kan ikke umiddelbart anvende LinearSolve(A,B)-kommandoen.
LinearSolve(A,B) løser nemlig ligningen: $A \cdot X = B$. Man skal først have flyttet den ubekendte, så den står til højre i matrix-produktet.

Ligningen omskrives til formen "$A \cdot X = B$" ved brug af invertering:
$eMa \cdot aQ = eQ \;\Leftrightarrow\; (eMa \cdot aQ)^{-1} = (eQ)^{-1} \;\Leftrightarrow\; (aQ)^{-1} \cdot (eMa)^{-1} = (eQ)^{-1} \;\Leftrightarrow$
$(aQ)^{-1} \cdot X = (eQ)^{-1}$ hvor $X = (eMa)^{-1}$

Det betyder, at den søgte basisskiftematrix eMa fås som X^{-1}, når ligningen kan løses med "$LinearSolve(A, B)$", hvor $A = (aQ)^{-1}$ og $B = (eQ)^{-1}$

> $(LinearSolve((aQ)^{-1}, (eQ)^{-1}))^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.3.1}$$

Konklusion: $\underline{\underline{{}_eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}}}$

P 'erne står nu som søjler udtrykt ved standard-basis (monomiske basis):

Konklusion: $\underline{\underline{\boldsymbol{P_1(x) = 1 + x^2,\; P_2(x) = -1 - x - 3 \cdot x^2,\; P_3(x) = 6 + x + 5 \cdot x^2}}}$