Amplitude af svingningen $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$

Et udtryk af formen $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$ kan omskrives.

$$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin(x) \right)$$

Da koefficienterne $\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$ udgør en enheds-vektor, findes der en vinkel *v*, så vektoren er $\begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{bmatrix}$.

Derfor kan vi omskrive videre:

$$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin(x) \right) =$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot (\cos(v) \cdot \cos(x) + \sin(v) \cdot \sin(x))$$

En **trigonometrisk sumformel** anvendes:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

http://en.wikipedia.org/wiki/Double-angle_formula#Angle_sum_and_difference_identities

Så kan omskrivningen fortsættes:

$$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin(x) \right) =$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot (\cos(v) \cdot \cos(x) + \sin(v) \cdot \sin(x)) = \boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(v - x)}$$

Dette er en svingning med amplituden $\sqrt{a^2 + b^2}$

NB: Sumformlen kan vises via omskrivning med komplekse tal:

$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta)} =$

$\mathrm{Re}\left(e^{i \cdot (\alpha - \beta)}\right) =$

$\mathrm{Re}\left(e^{i \cdot \alpha} \cdot e^{-i \cdot \beta}\right) =$

$\mathrm{Re}\left((\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta))\right) =$

$\mathrm{Re}\left((\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) - i \cdot \sin(\beta))\right) =$

$\mathrm{Re}\left((\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)) + i \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta))\right) =$

$\boldsymbol{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$