

## Omskrivning af en kvadratisk form i 2 variable

Eksemplet er en uddybning af Eksempel 20.1 i eNote nr. 20

**NB: Når du kører Maple-filen med !!! vil der ske det, at resultatet i ligning 8 kan komme ud på forskellige måde.**

**Det kan betyde, at de 2 egenverdier er ombyttet, og egenvektorerne har modsatte koordinater!**

> restart

Transponering af matrix laves som en simpel procedure  $T$ :

>  $T := \text{proc}(M) \text{ LinearAlgebra[Transpose]}(M) \text{ end proc}$ :

>  $f := (x, y) \rightarrow 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13$

$$f := (x, y) \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 8x - 10y + 13 \quad (1)$$

>  $\text{VectorCalculus}[Jacobian](\langle f(x, y) \rangle, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4x + 2y - 8 & 2x + 4y - 10 \end{bmatrix} \quad (2)$$

>  $\text{VectorCalculus}[Hessian](f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

>  $H := \frac{1}{2} \cdot \%$

$$H := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Den kvadratiske form kan så skrives:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

Formlen kontrolleres:

>  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

$$(2x + y)x + (x + 2y)y - 8x - 10y + 13 \quad (5)$$

>  $\text{expand}(\%)$

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 8x - 10y + 13 \quad (6)$$

Hvilket præcist er den givne kvadratiske form  $f$ .

Nu skal  $H$  diagonaliseres:

>  $\text{LinearAlgebra}[Eigenvectors](H)$

(7)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

> `LinearAlgebra[Eigenvalues](H, output='list')`

$$\left[ \left[ 3, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ 1, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right] \quad (8)$$

Egenværdierne pilles ud:

$$\begin{aligned} > e1 := (8)[1, 1] & \qquad \qquad \qquad e1 := 3 & (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > e2 := (8)[2, 1] & \qquad \qquad \qquad e2 := 1 & (10) \end{aligned}$$

Egenrummene står vinkelret på hinanden i følge teorien.

Egenvektorerne pilles ud og gøres til enhedsvektorer:

$$\begin{aligned} > v1 := (8)[1, 3, 1] & \qquad \qquad \qquad v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > v1 := \frac{v1}{\sqrt{v1 \cdot v1}} & \qquad \qquad \qquad v1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{bmatrix} & (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > v2 := (8)[2, 3, 1] & \qquad \qquad \qquad v2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} & (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > v2 := \frac{v2}{\sqrt{v2 \cdot v2}} & \qquad \qquad \qquad v2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{bmatrix} & (14) \end{aligned}$$

Diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen:

$$\begin{aligned} > \Lambda := \begin{bmatrix} e1 & 0 \\ 0 & e2 \end{bmatrix} & \qquad \qquad \qquad \Lambda := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (15) \end{aligned}$$

Ortogonal substitutionsmatrix:

$$\text{> } Q := \langle v1|v2 \rangle$$

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Hvis determinanten er -1, ombyttes søjlerne i Q (og egenvektorerne ombyttes):

$$\text{> } \text{LinearAlgebra}[Determinant](Q)$$

1

(17)

**> if LinearAlgebra[Determinant](Q) == -1 then Q := <v2|v1>; v := v2; v2 := v1; v1 := v; end if;**

**De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)**

I formlen  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$  skal  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  erstattes af  $Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\left( Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right)^T \cdot H \cdot \left( Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot (Q^T \cdot H \cdot Q) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$

**Altså er vi sluppet af med det blandede 2. grads led, som hedder  $2 \cdot x \cdot y$**

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$

$$3 \cdot (x_1^2 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1) + (y_1^2 - \sqrt{2} \cdot y_1) + 13 =$$

$$3 \cdot \left( \left( x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \left( \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 \right) + \left( \left( y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 \right) + 13 =$$

$$\begin{aligned}
& 3 \cdot \left( \left( x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \right) + \left( \left( y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) + 13 = \\
& 3 \cdot \left( x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{27}{2} + \left( y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{1}{2} + 13 = \\
& 3 \cdot \left( x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 + \left( y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - 1 = \\
& \left( \frac{x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right)^2 + \left( \frac{y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{1} \right)^2 - 1
\end{aligned}$$

Dvs.  $f(x, y) = 0$  er en ellipse med halvakslerne  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  og 1.

Som forventet giver  $Q^T \cdot H \cdot Q$  diagonalmatricen  $\Lambda$  :

>  $T(Q) \cdot H \cdot Q$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)

1. grads leddet udregnes:

>  $\begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q$

$$\begin{bmatrix} -9\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(19)

I den kvadratiske form:  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

erstattes de gamle koordinater  $(x, y)$  med nye koordinater  $(xI, yI)$  :  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}$

>  $T\left(Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}\right) \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}\right) + 13 = 0$

$$\left( \frac{3}{2} \sqrt{2} xI - \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} xI - \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) + \left( \frac{3}{2} \sqrt{2} xI
\right.$$

(20)

$$\left. + \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} xI + \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) - 9\sqrt{2} xI - \sqrt{2} yI + 13 = 0$$

> *simplify*(%)

$$(-9xI - yI)\sqrt{2} + 3xI^2 + yI^2 + 13 = 0$$

(21)

> *Student*[Precalculus][CompleteSquare](%)

$$\left( yI - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^2 + 3 \left( xI - \frac{3}{2} \sqrt{2} \right)^2 - 1 = 0$$

(22)

Ellipsens centrum er  $CI = (xI_0, yI_0) = \left( \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)$  i de nye koordinater!

I gamle koordinater ligger centrum i punktet  $C = (1, 2)$ :

$$> C := Q. \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

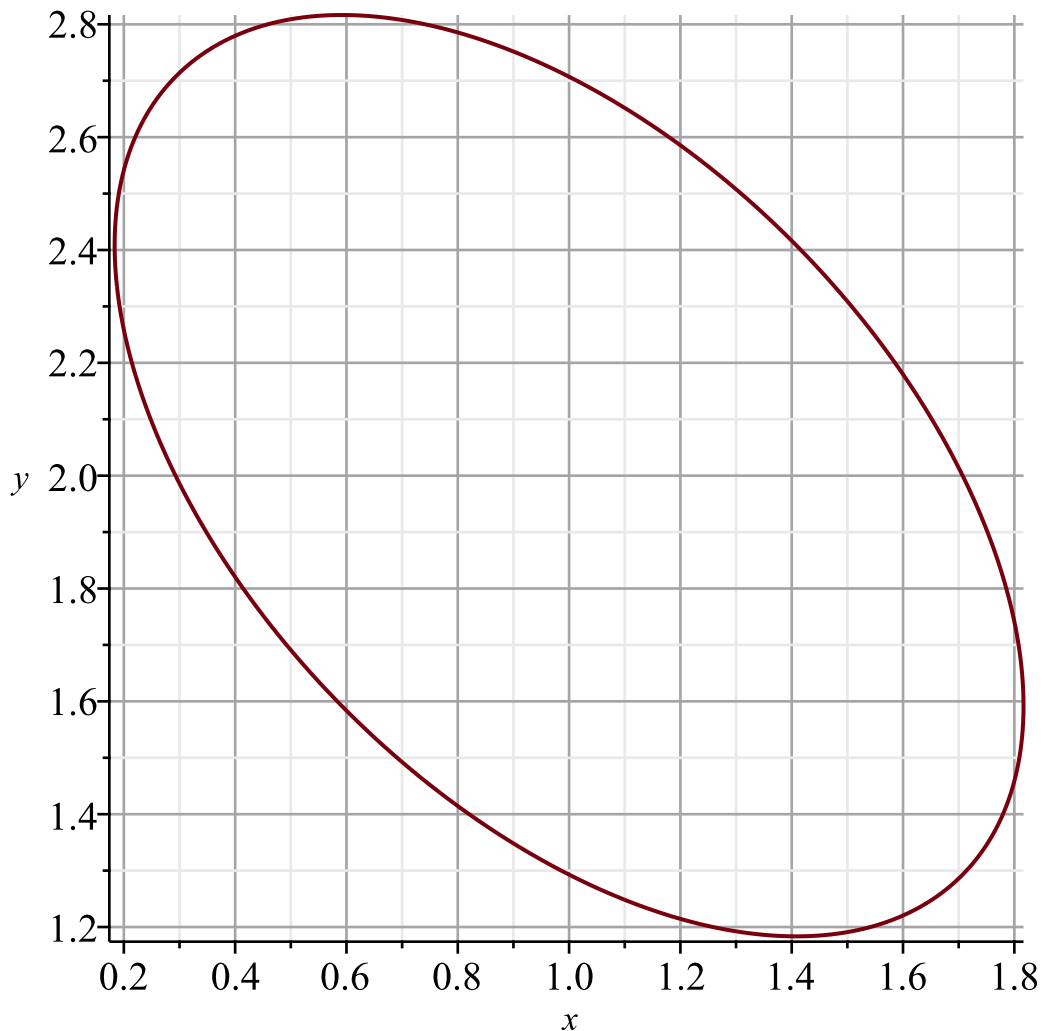
$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(23)

**Ellipsen plottes:**

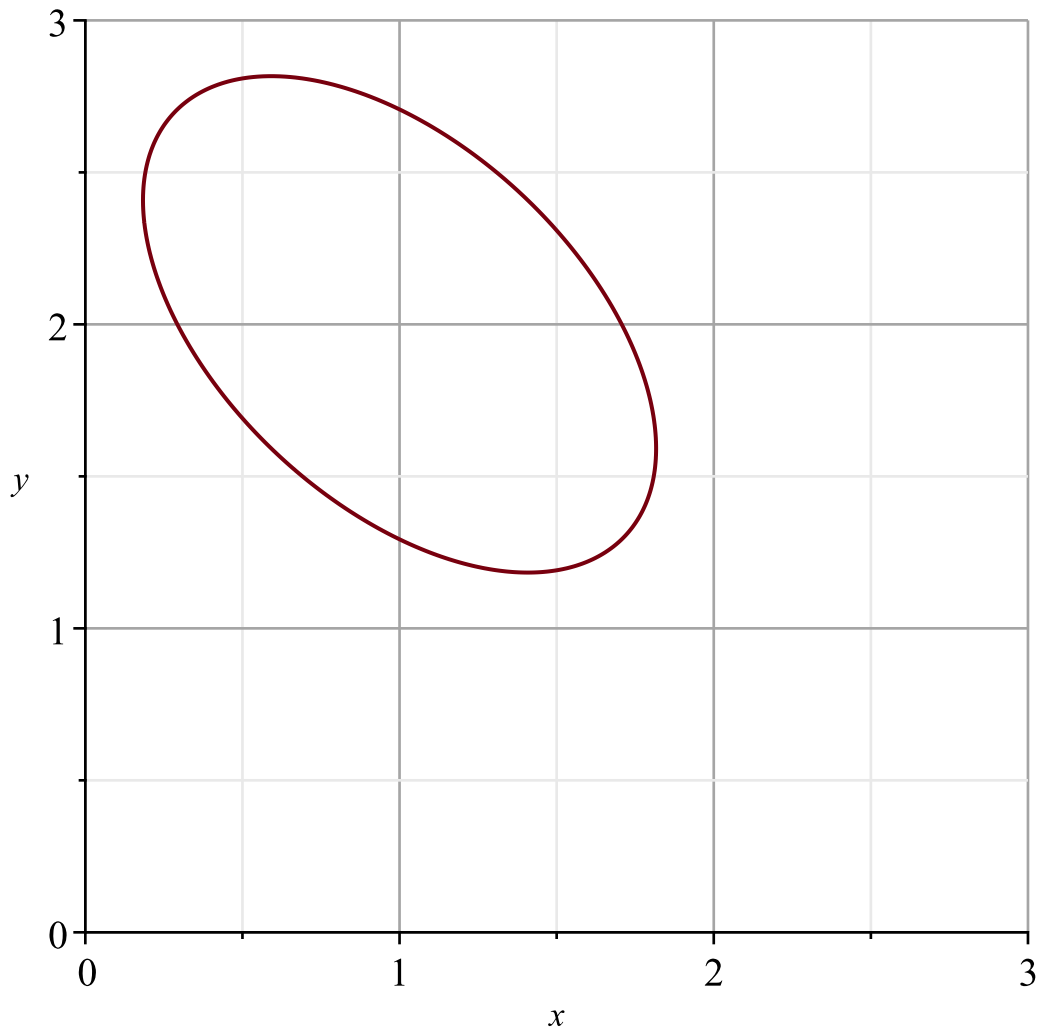
> *with(plots) :*

> *implicitplot(2·x<sup>2</sup> + 2·y<sup>2</sup> + 2·x·y - 8·x - 10·y + 13 = 0, x = 0 .. 2, y = 1 .. 3, numpoints = 100000, gridlines)*



Origo bør ses på plottet:

> *implicitplot(2·x<sup>2</sup> + 2·y<sup>2</sup> + 2·x·y - 8·x - 10·y + 13 = 0, x = 0 .. 2, y = 1 .. 3, numpoints = 100000, view = [0 .. 3, 0 .. 3], gridlines)*



Centrum ligger i  $C = (1, 2)$ .

Halvakserne går gennem centrum, og følger de nye koordinataksler!

Længden af halvakserne er fundet ovenfor som  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  og 1.

Halvakserne tegnes med en parameterfremstilling for et ret linjestykke.

#### Ellipsen tegnes med centrum og halvakser:

```
> ellipse := implicitplot(2*x^2 + 2*y^2 + 2*x*y - 8*x - 10*y + 13 = 0, x=0..2, y=1..3, numpoints
    = 100000, color = red) :
centrum := pointplot([1], [2], symbolsize=20, symbol=solidcircle, color=black) :
lilleakse := plot([C1 + t*v1_1, C2 + t*v1_2, t=-sqrt(3)/3 .. sqrt(3)/3], color=blue) :
storakse := plot([C1 + t*v2_1, C2 + t*v2_2, t=-1..1], color=green) :
display(ellipse, centrum, storakse, lilleakse, view=[0..3, 0..3], gridlines)
```

