

## Eksempel på funktion af 2 variable, som har egentligt lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo, men som ikke har lokalt minimum i origo!

Eksemplet er hentet fra side 122 i bogen "Counterexamples in Analysis":

[http://books.google.com/books?id=cDAMh5n4lkkC&printsec=frontcover&hl=da&source=gbs\\_navlinks\\_s#v=onepage&q=&f=false](http://books.google.com/books?id=cDAMh5n4lkkC&printsec=frontcover&hl=da&source=gbs_navlinks_s#v=onepage&q=&f=false)

13. A differentiable function of two variables possessing no extremum at the origin but for which the restriction to an arbitrary line through the origin has a strict relative minimum there.

The function

$$f(x, y) \equiv (y - x^2)(y - 3x^2)$$

has no relative extremum at the origin since there are points of the form  $(0, b)$  arbitrarily near the origin at which  $f$  is positive, and also points of the form  $(a, 2a^2)$  arbitrarily near the origin at which  $f$  is negative. If the domain of  $f$  is restricted to the  $x$  axis, the restricted function  $3x^4$  has a strict absolute minimum at  $x = 0$ . If the domain of  $f$  is restricted to the  $y$  axis, the restricted function  $y^2$  has a strict absolute minimum at  $y = 0$ . If the domain of  $f$  is restricted to the line  $y = mx$  through the origin where  $0 < |m| < +\infty$ , the restricted function of the parameter  $x$ :

$$g(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$$

has a strict relative minimum at the origin since  $g'(0) = 0$  and  $g''(0) = 2m^2 > 0$ .

> restart

> with(plots) : with(plottools) :

> f := (x, y) → (y - x<sup>2</sup>) · (y - 3 · x<sup>2</sup>)

$$f := (x, y) \rightarrow (y - x^2) (y - 3x^2)$$

(1)

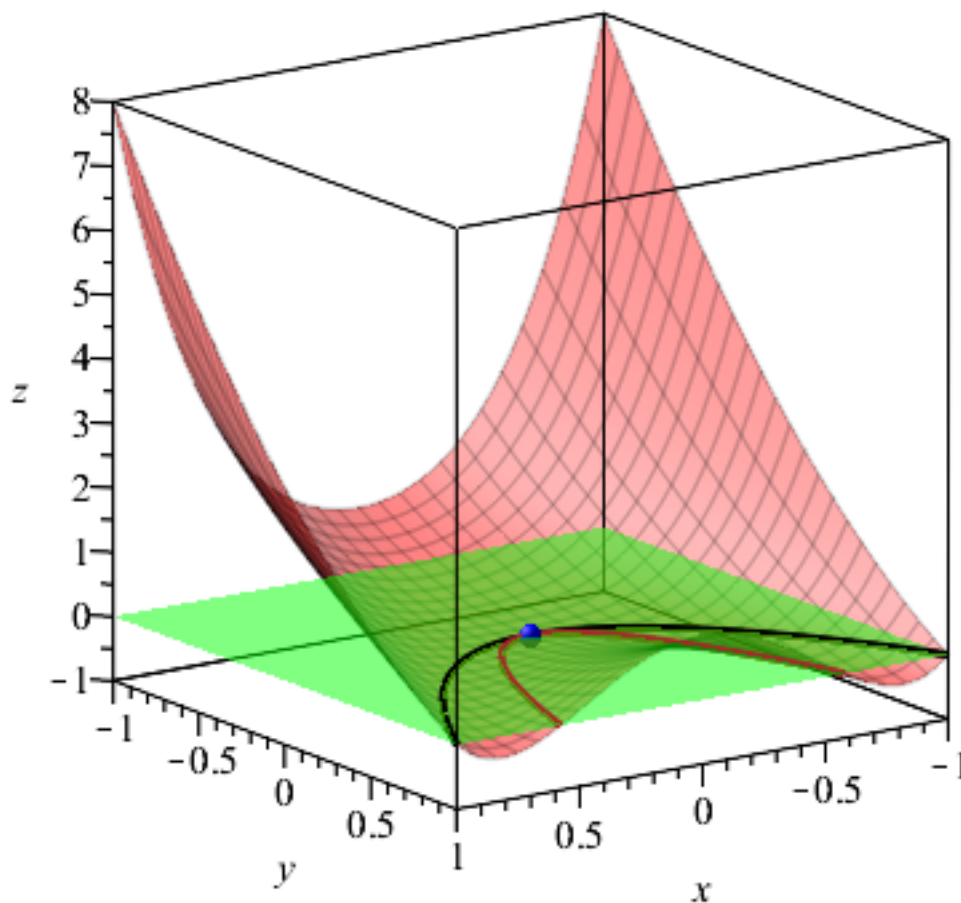
### Ikke lokalt minimum i origo

#### Grafisk bevis

```

> graf := plot3d(f(x, y), x=-1 ..1, y=-1 ..1, axes = boxed, labels = [x, y, z], color = red,
  transparency = 0.5) :
gulv := implicitplot3d(z=0, x=-1 ..1, y=-1 ..1, z=-1 ..1, color = green, transparency
  = 0.5, style = patchnograd) :
parabell := spacecurve(⟨t, t2, 0⟩, t=-1 ..1, color = black, thickness = 3) :
parabel2 := spacecurve(⟨t, 3·t2, 0⟩, t=-1/√3 .. 1/√3, color = brown, thickness = 3) :
origo := point([0, 0, 0], color = blue, symbol = solidsphere, symbolsize = 20) :
display(graf, gulv, parabell, parabell2, origo)

```



Grafisk ses det tydeligt, når man drejer på figuren, at der IKKE er lokalt minimum i origo!

På de 2 parabler er funktionen 0, mens den er negativ mellem de 2 parabler. Ellers er funktionen positiv.

### Korrekt bevis

For at bevise det, ser man på 2 måder at nærme sig origo.

Dels på en parabel  $y = 2 \cdot x^2$ , som ligger imellem de 2 tegnede, dels på den rette linje  $y = 0$ .

```
> g := x → f(x, 2·x2) :
```

```
> g(x)
```

$$-x^4 \quad (1.2.1)$$

Det er tydeligt, at funktionen er **negativ** på hele parablen  $y = 2 \cdot x^2$  på nær i origo, hvor funktionen er 0.

$$> h := x \rightarrow f(x, 0) :$$

$$> h(x)$$

$$3x^4 \quad (1.2.2)$$

Det er tydeligt, at funktionen er **positiv** på hele den rette linje  $y = 0$  på nær i origo, hvor funktionen er 0.

Hermed er det bevist, at  $f(x, y)$  **IKKE** har lokalt minimum i origo.

## Lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo

Ser på restriktionen til den rette linje  $y = a \cdot x$  gennem origo (NB:  $a \in \mathbb{R}$ ).

Udtrykket inkluderer ikke den lodrette linje  $x = 0$ , som skal specialundersøges.

### Lodret linje

$$> i := y \rightarrow f(0, y) :$$

$$> i(y)$$

$$y^2 \quad (2.1.1)$$

Det ses tydeligt, at der er egentligt lokalt minimum i origo, når man tager restriktionen til den lodrette linje  $x = 0$  gennem origo.

### Generel linje

$$> j := x \rightarrow f(x, a \cdot x) :$$

$$> j(x)$$

$$(ax - x^2)(ax - 3x^2) \quad (2.2.1)$$

$$> j(0)$$

$$0 \quad (2.2.2)$$

$$> factor(j(x))$$

$$x^2(a-x)(a-3x) \quad (2.2.3)$$

$$> solve(j(x) = 0, x)$$

$$a, \frac{1}{3}a, 0, 0 \quad (2.2.4)$$

### $a = 0$ (vandret linje)

Antag, at  $a = 0$ :

$$> subs(a = 0, j(x))$$

$$3x^4 \quad (2.2.1.1)$$

Funktionen har tydelig egentligt lokalt minimum i origo for restriktionen til den rette linje  $y = 0$ .

▼  **$a > 0$  (positiv hældningskoefficient)**

Antag at  $a > 0$ :

Da  $a > 0$ , er 2 af rødderne *positive*.

Der er 3 forskellige rødder:  $0$ ,  $\frac{1}{3} \cdot a$  og  $a$ .

$0$  er en dobbeltrod, derfor skifter  $j(x)$  ikke fortegn omkring  $0$ .

Faktoropløsningen er:  $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$ .

Da  $a > 0$  er  $j(0) = 0$  og  $j(x) > 0$  i intervallerne  $]-\infty; 0[$  og  $0; \frac{1}{3} \cdot a[$ .

**Derfor er der egentligt minimum i origo for restriktionen til den rette linje  $y = a \cdot x$ , hvor  $a > 0$ .**

▼  **$a < 0$  (negativ hældningskoefficient)**

Antag at  $a < 0$ :

Da  $a < 0$ , er 2 af rødderne *negative*.

Der er 3 forskellige rødder:  $a$ ,  $\frac{1}{3} \cdot a$  og  $0$ .

$0$  er en dobbeltrod, derfor skifter  $j(x)$  ikke fortegn omkring  $0$ .

Faktoropløsningen er:  $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$ .

Da  $a < 0$  er  $j(0) = 0$  og  $j(x) > 0$  i intervallerne  $]\frac{1}{3} \cdot a; 0[$  og  $0; \infty[$ .

**Derfor er der egentligt minimum i origo for restriktionen til den rette linje  $y = a \cdot x$ , hvor  $a < 0$ .**

Generelt kan man sige, at - bortset fra den lodrette og den vandrette linje - vil **origo være**

**minimum i intervallet**  $]-\frac{1}{3} \cdot |a|, \frac{1}{3} \cdot |a|[$ .