

Tegning af 2D-parametriseret område

Anvendelse af Integrator8-pakken

Dobbeltintegraler med ikke-faste grænser

Eksemplerne er fra Maple-demo 24a_Planintegral

Kortfattet oversigt over kommandoerne i Integrator8-pakken kan findes på Steens hjemmeside

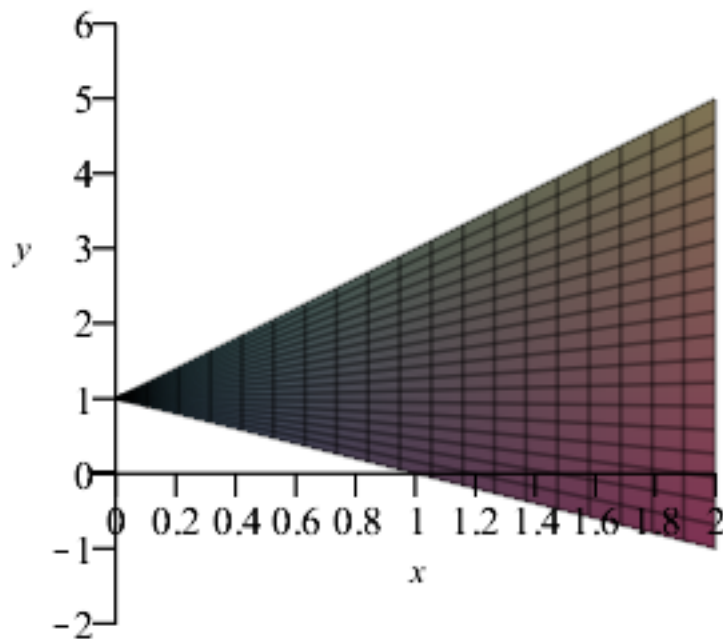
Plot af parametriseret område i planen (2D)

```
[> restart  
[> with(Integrator8) :
```

Eksempel 1 (trekant)

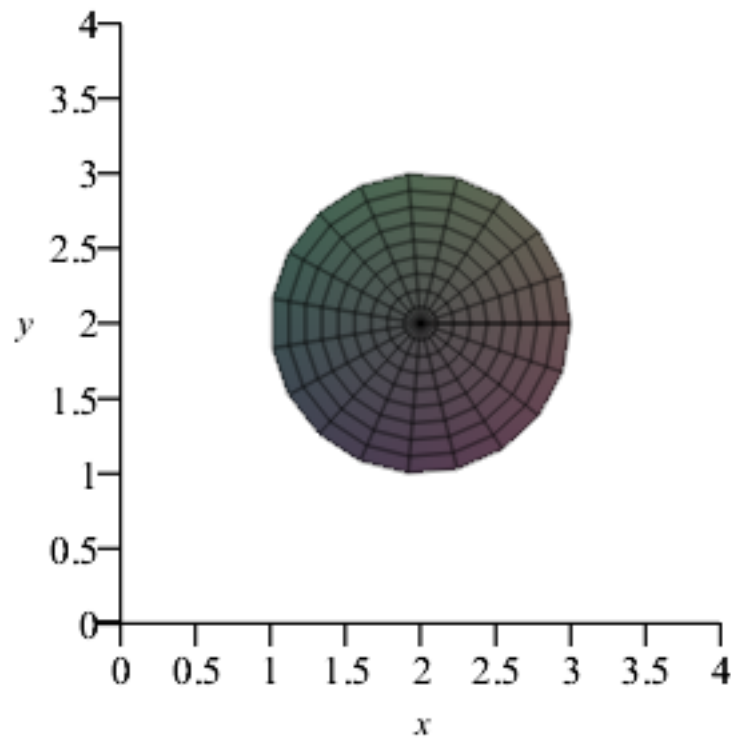
Det parametriserede 2D-område kan - *tilsyneladende* - kun tegnes ved at tegne et 3D-plot, som ses ovenfra!

```
> plot3d(⟨u, 1 - u + 3·v·u, 0⟩, u = 0 ..2, v = 0 ..1, labels = [x, y, ""], axes = normal,  
orientation = [-90, 0], view = [0 ..2, -2 ..6, -1 ..1], tickmarks = [10, 10, 10], grid  
= [20, 20])
```



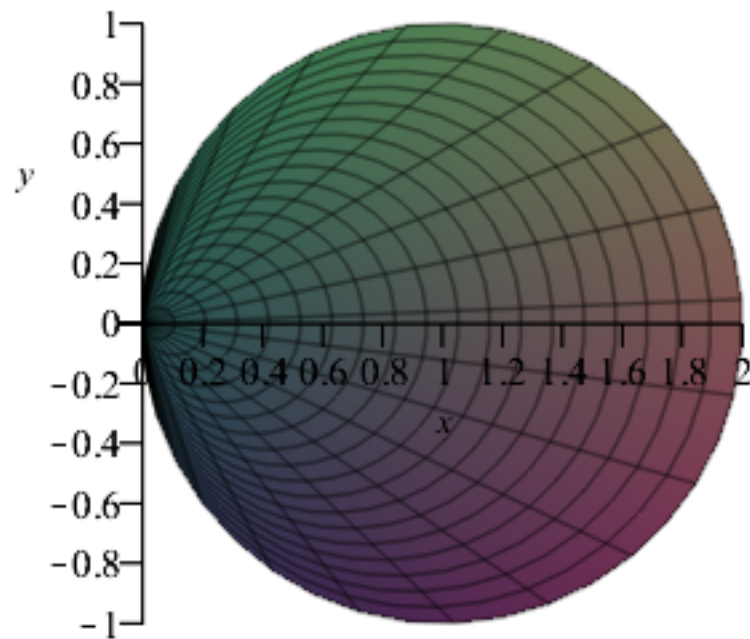
▼ Eksempel 2 (cirkel)

```
> plot3d(⟨2 + u·cos(v), 2 + u·sin(v), 0⟩, u=0..1, v=0..2·π, labels=[x, y, ""], axes  
=normal, orientation=[-90, 0], view=[0.4, 0.4, -1..1], tickmarks=[10, 10, 10],  
grid=[10, 20])
```



▼ Eksempel 3 (cirkel)

```
> plot3d( (2*u*cos(v)*cos(v), 2*u*cos(v)*sin(v), 0), u=0..1, v=-pi/2..pi/2, labels=[x, y,  
"", axes=normal, orientation=[-90, 0], view=[0..2, -1..1, -1..1], tickmarks  
=[10, 10, 10], grid=[20, 40] )
```



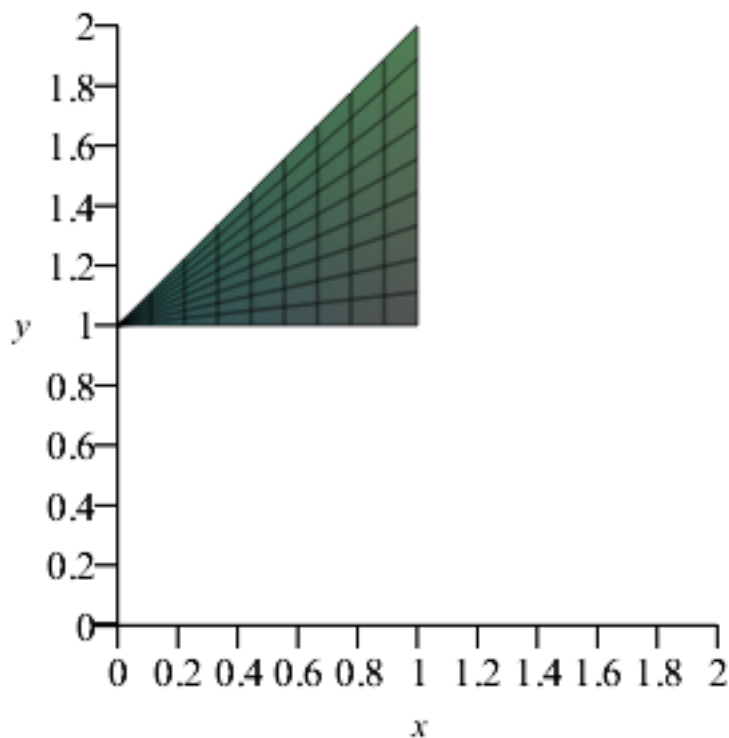
▼ Et planintegral over et trekantet område

> $r := (u, v) \rightarrow \langle u, 1 + v \cdot u \rangle : r(u, v)$

$$\begin{bmatrix} u \\ u v + 1 \end{bmatrix}$$

(1.4.1)

> `plot3d(⟨r(u, v)[1], r(u, v)[2], 0⟩, u = 0 .. 1, v = 0 .. 1, labels = [x, y, ""], axes = normal, orientation = [-90, 0], view = [0 .. 2, 0 .. 2, -1 .. 1], tickmarks = [10, 10, 10], grid = [10, 10])`



a) Beregnet med Integrator8-pakken

$$> f := (x, y) \rightarrow 2 \cdot x \cdot y : f(x, y)$$

$$2yx$$

(1.4.1.1)

$$> B := [0, 1, 0, 1]$$

$$B := [0, 1, 0, 1]$$

(1.4.1.2)

$$> \text{planIntGo}(r, B, f)$$

$$\frac{11}{12}$$

(1.4.1.3)

b) Beregnet med **integral, hvor grænserne ikke er konstante**

Parameteren y løber mellem 1 og $x+1$ (idet den rette linje $y = x + 1$ begrænser opadtil).

Parameteren x løber mellem 0 og 1.

$$> \int_0^1 \int_1^{x+1} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$\frac{11}{12}$$

(1.4.2.1)

Opdelt i 2 trin:

$$> \int_1^{x+1} f(x, y) \, dy$$

$$x \left((x+1)^2 - 1 \right) \quad (1.4.2.2)$$

$$> \int_0^1 (1.4.2.2) \, dx$$

$$\frac{11}{12} \quad (1.4.2.3)$$

eller

Parameteren x løber mellem $y - 1$ og 1 (idet den rette linje $y = x + 1$ begrænser opadtil).
Parameteren y løber mellem 1 og 2 .

$$> \int_1^2 \int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy$$

$$\frac{11}{12} \quad (1.4.2.4)$$

Opdelt i 2 trin:

$$> \int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx$$

$$y \left(1 - (y-1)^2 \right) \quad (1.4.2.5)$$

$$> \int_1^2 (1.4.2.5) \, dy$$

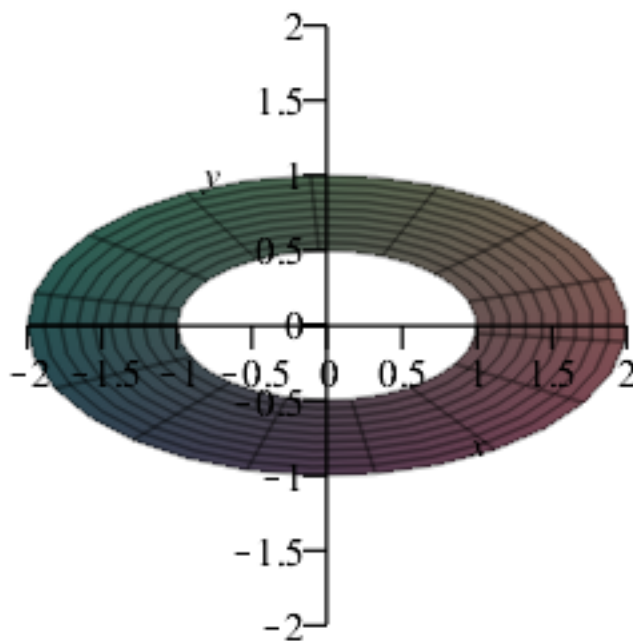
$$\frac{11}{12} \quad (1.4.2.6)$$

Et planintegral og massemidtpunkt**Planintegralet**

$$> r := (u, v) \rightarrow \left\langle u \cdot \cos(v), \frac{1}{2} \cdot u \cdot \sin(v) \right\rangle : r(u, v)$$

$$\begin{bmatrix} u \cos(v) \\ \frac{1}{2} u \sin(v) \end{bmatrix} \quad (1.5.1.1)$$

$$> \text{plot3d}(\langle r(u, v)[1], r(u, v)[2], 0 \rangle, u = 1 .. 2, v = -\pi .. \pi, \text{labels} = [x, y, ""], \text{axes} = \text{normal}, \text{orientation} = [-90, 0], \text{view} = [-2 .. 2, -2 .. 2, -1 .. 1], \text{tickmarks} = [10, 10, 10], \text{grid} = [10, 30])$$



```
> f := (x, y) -> (x - 1)^2 (y + 1)^2
```

```
f := (x, y) -> (x - 1)^2 (y + 1)^2
```

(1.5.1.2)

```
> B := [1, 2, -pi, pi]
```

```
B := [1, 2, -pi, pi]
```

(1.5.1.3)

```
> planIntGo(r, B, f)
```

$$\frac{267}{64} \pi$$

(1.5.1.4)

▼ **Massemidtpunktet**

```
> planCmGo(r, B, f)
```

$$\left[-\frac{94}{89}, \frac{34}{89} \right]$$

(1.5.2.1)