

Differentiabilitet af vektorfunktion

Man kan ikke se på 2D-banekurve for en vektorfunktion $f(t)=(x(t),y(t))$ om den er differentiabel.

NB: Man skal undersøge om hver af koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er differentiabel.

Eksempel på en differentiabel vektorfunktion af 2 variable

> restart

> with(plots) :

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ t^2 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

> x := t → piecewise(0 < t, t², t ≤ 0, 0) :!x(t) != x(t)

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

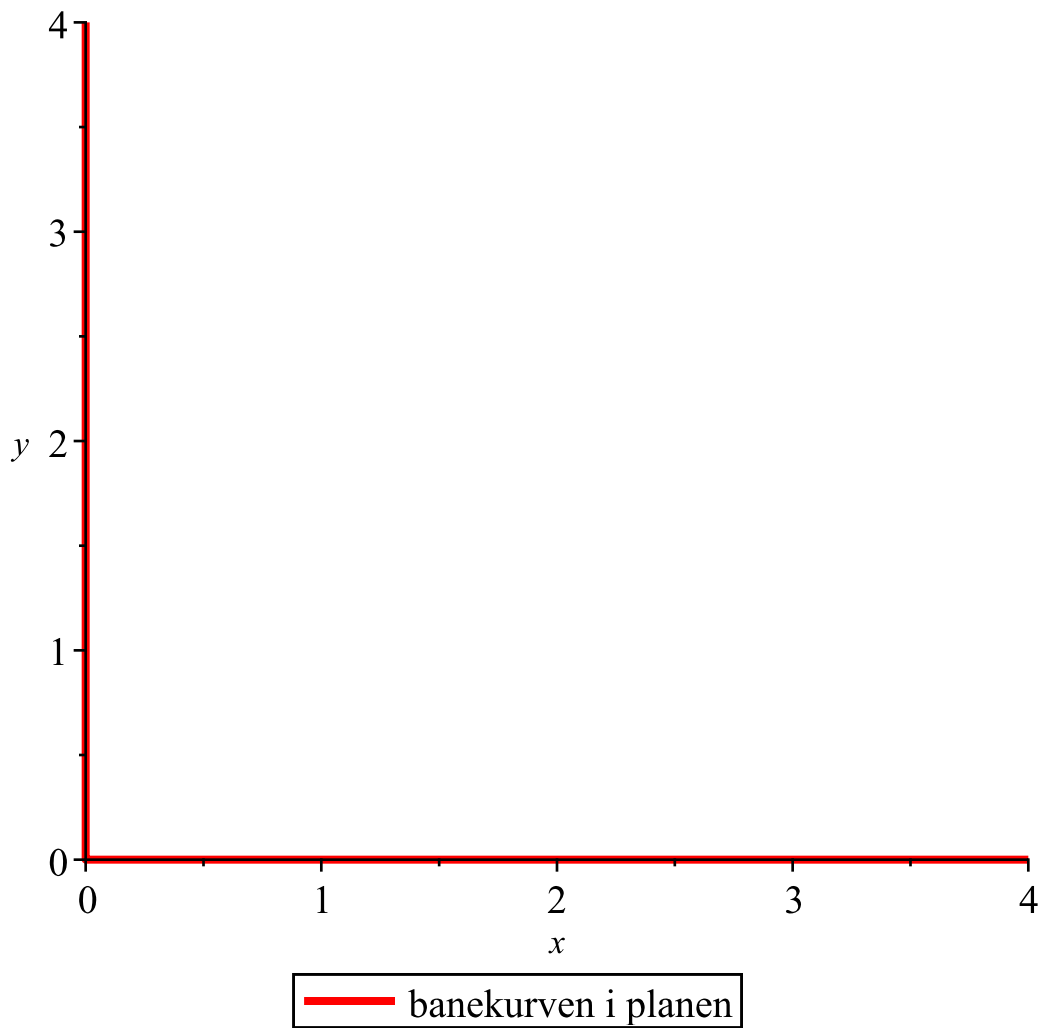
> y := t → piecewise(0 < t, 0, t ≤ 0, t²) :!y(t) != y(t)

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \\ t^2 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Banekurven i planen knækker 90° i (0,0):

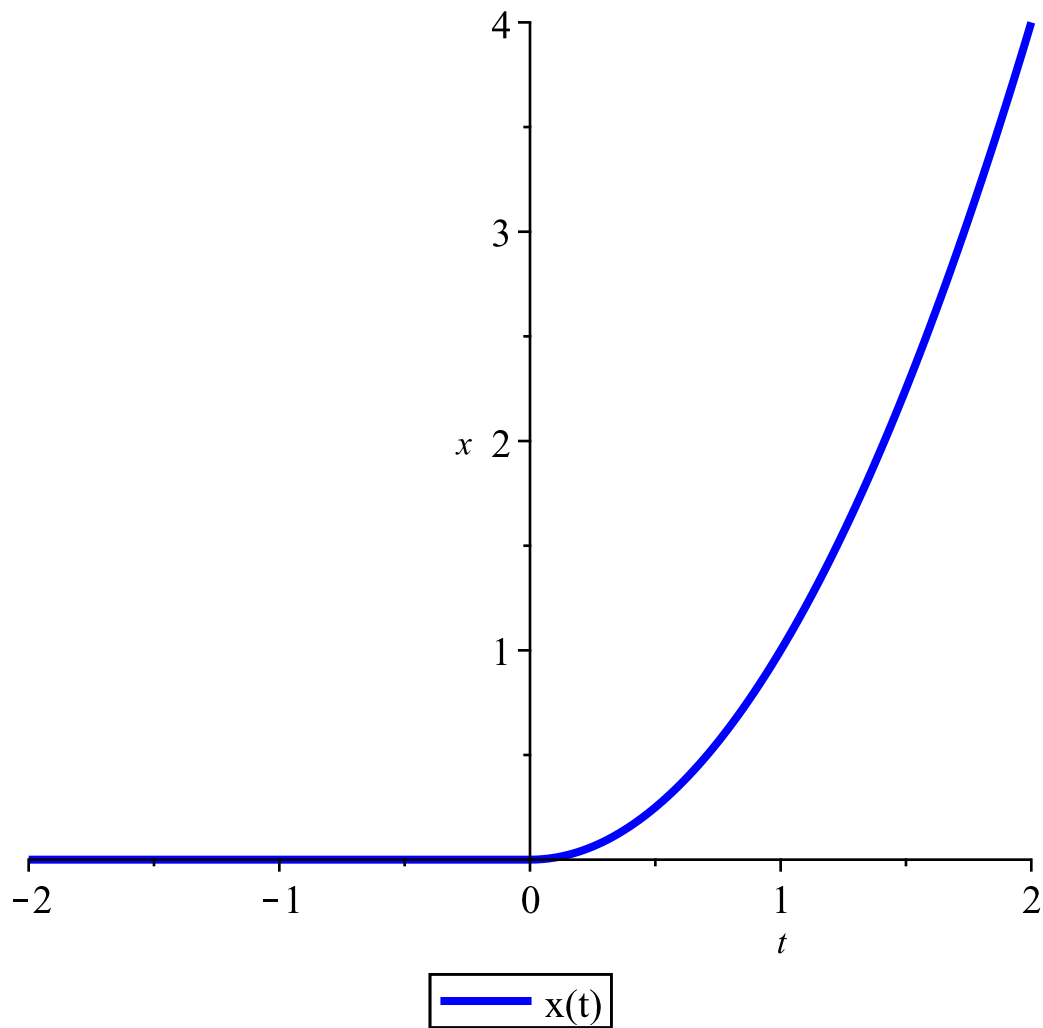
NB: Her er kun 2 kordinater: x og y.

> plot([x(t), y(t), t=-2..2], color=red, thickness=3, labels=[x, y], legend=["banekurven i planen"])

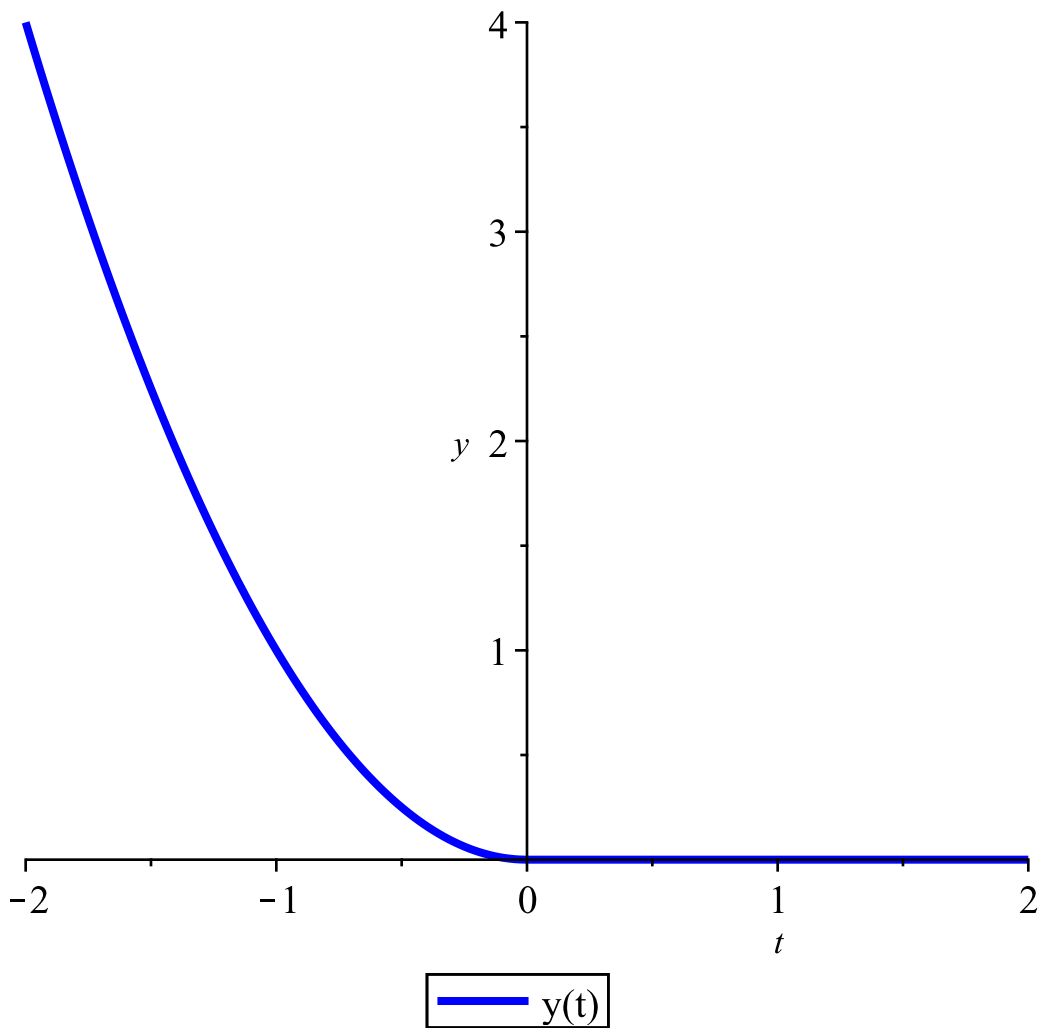


Men funktionen $f(t)=(x(t),y(t))$ er en differentiabel funktion, da **koordinatfunktionerne** $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable:

> `plot(x(t), t=-2..2, color=blue, thickness=3, labels=[t,x], legend=["x(t)"])`



```
> plot(y(t), t=-2..2, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"])
```



Koordinatfunktionernes afledede $x'(t)$ og $y'(t)$ er **kontinuerte** funktioner af t :

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ 2t & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

> $x'(t)$

$$\begin{cases} 2 & 0 < t \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

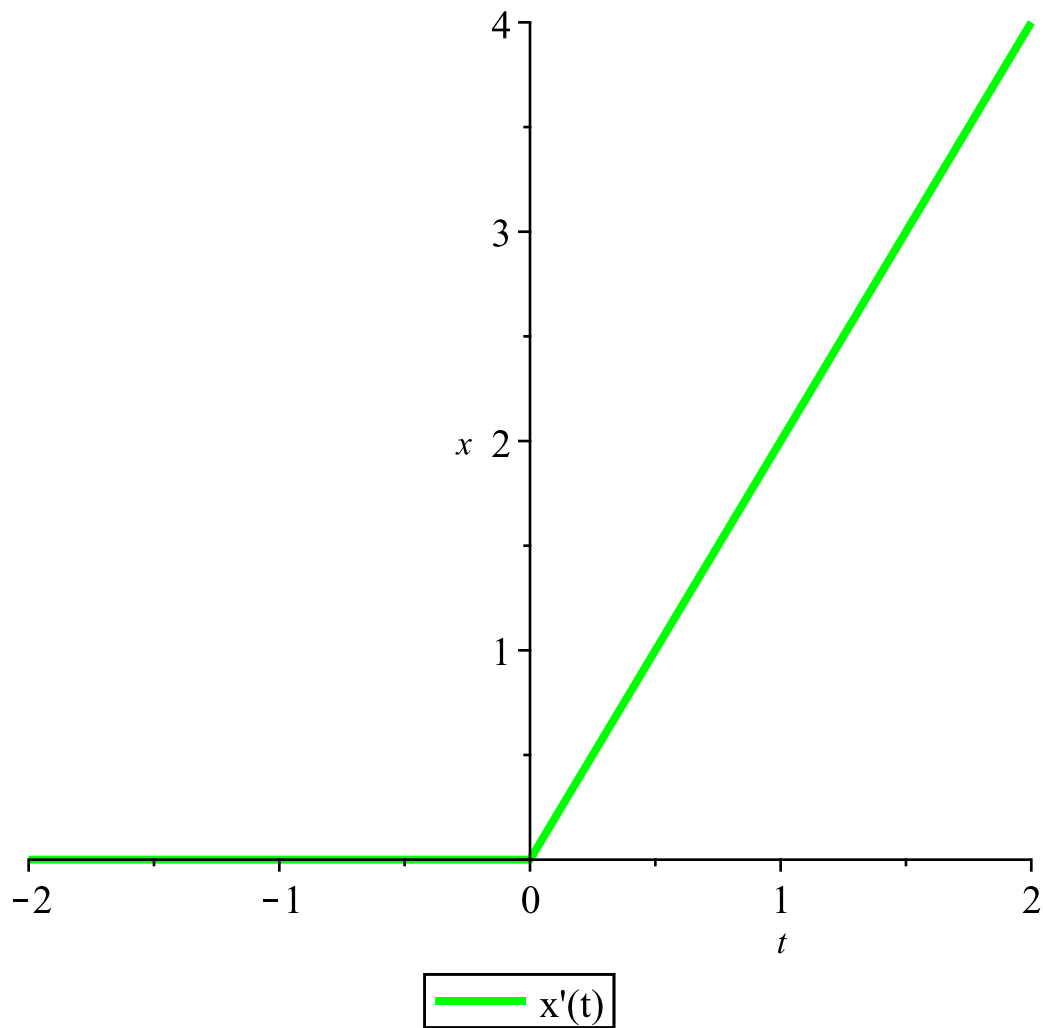
(1.3)

> $y'(t)$

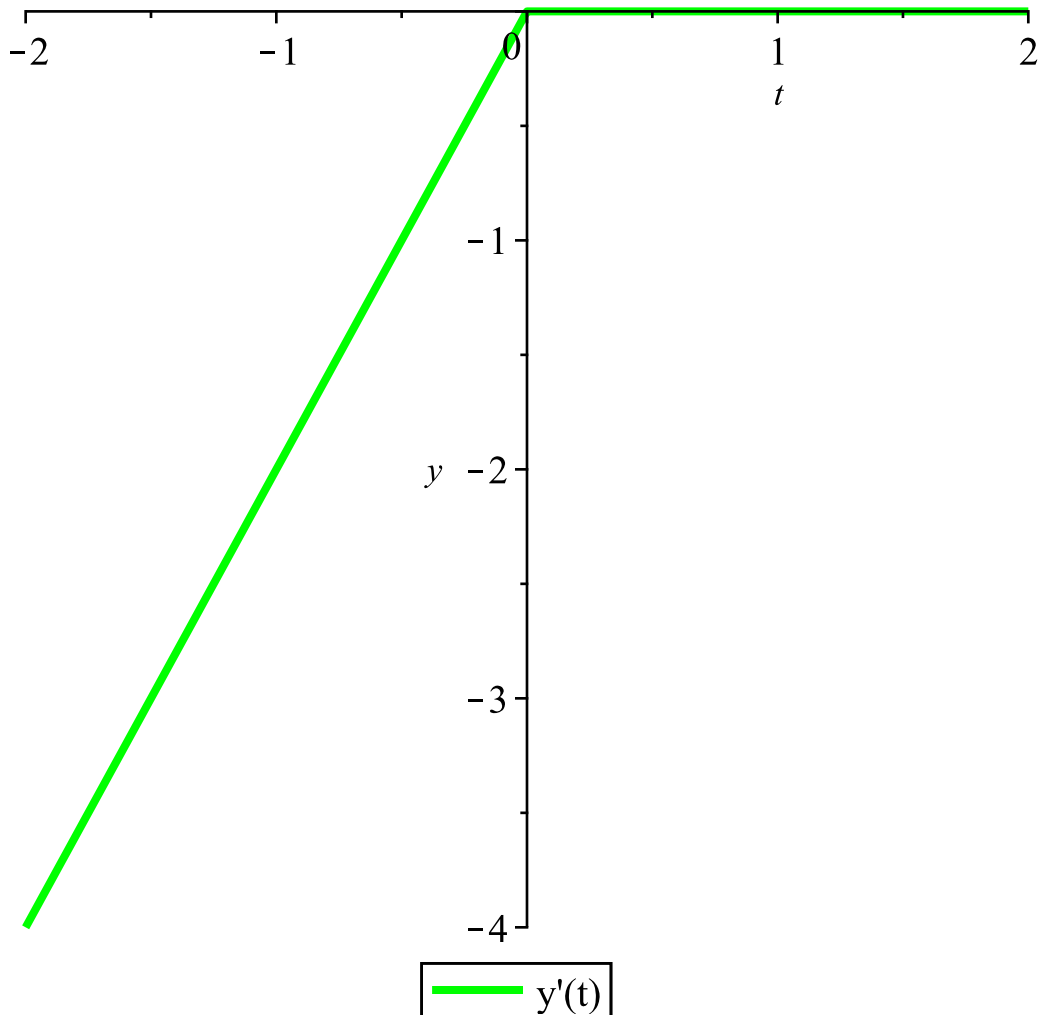
$$\begin{cases} 0 & 0 < t \\ 2 & t \leq 0 \end{cases}$$

(1.4)

> `plot(x'(t), t=-2..2, color=green, thickness=3, legend=["x'(t)"], labels=[t, x])`



```
> plot(y'(t), t=-2..2, color = green, thickness = 3, legend = ["y'(t)"], labels = [t, y])
```



Banekurven i rummet er differentiabel:

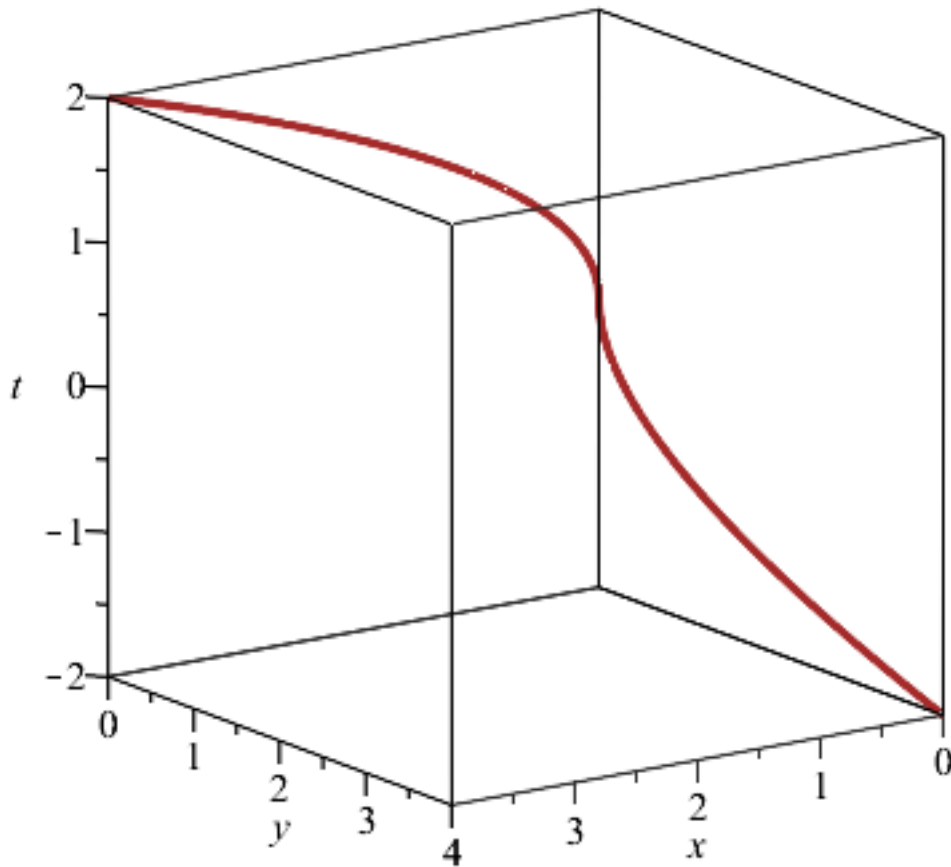
NB: Her er 3 kordinater: t , x og y .

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. *Grafen er simpelthen glat - også i $t = 0$.*)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t -aksen går ud af skærmen samt x -aksen til højre og y -aksen opad. Så fremkommer banekurven i x - y -planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness=3, color=brown, axes=BOXED, labels=[x,`
`y, t])`

$t=0$.



▼ Eksempel på en ikke-differentiabel vektorfunktion af 2 variable

```
> restart
```

```
> with(plots) :
```

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

```
> x := t -> piecewise(t < 0, 1/2 * t, t >= 0, 2 * t) : 'x(t)' = x(t)
```

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & t < 0 \\ 2 t & 0 \leq t \end{cases}$$

(2.1)

> $y := t \rightarrow \text{piecewise}\left(t < 0, \frac{1}{2} \cdot t, t \geq 0, 2 \cdot t\right) : 'y(t)' = y(t)$

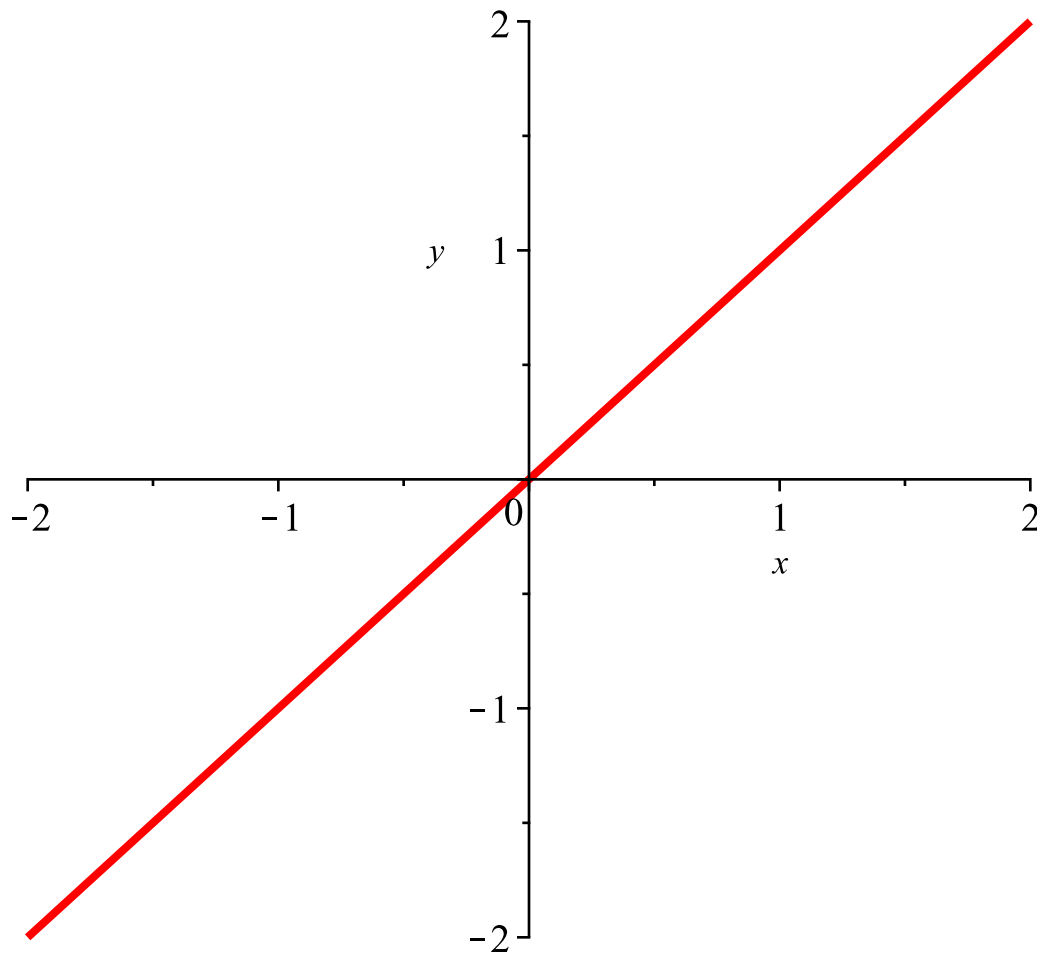
$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & t < 0 \\ 2 t & 0 \leq t \end{cases}$$

(2.2)

Banekurven i planen er en ret linje:

NB: Her er kun 2 kordinater: x og y.

> `plot([x(t), y(t), t=-4..1], color=red, thickness=3, labels=[x, y], legend=["banekurven i planen"])`

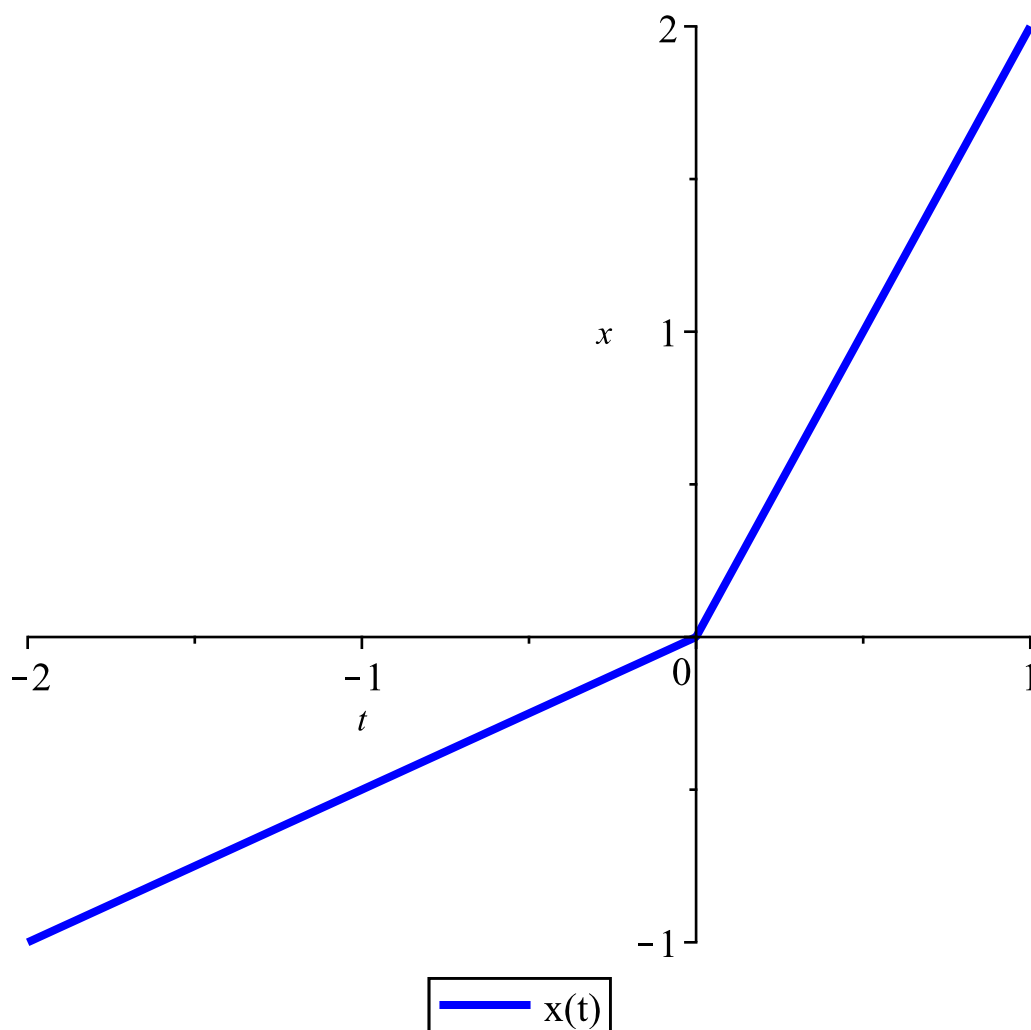


— banekurven i planen

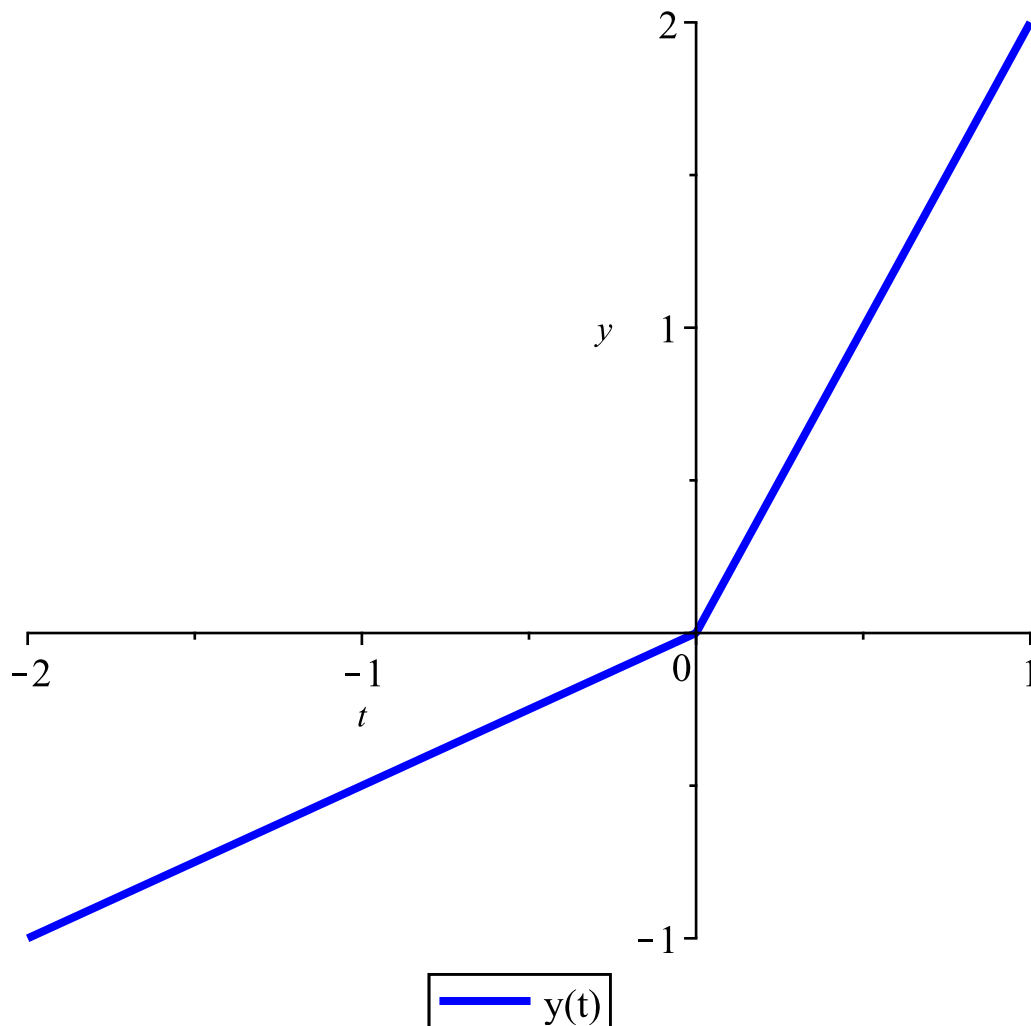
Men koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er ikke differentiable:

(grafnen knækker i 0)

> `plot(x(t), t=-2..1, color=blue, thickness=3, labels=[t, x], legend=["x(t)"])`



```
> plot(y(t), t=-2..1, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"])
```



Banekurven i rummet er ikke-differentiabel:

NB: Her er 3 koordinater: t , x og y .

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. Grafen knækker i $t = 0$.)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t -aksen går ud af skærmen samt x -aksen til højre og y -aksen opad. Så fremkommer banekurven i x - y -planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness=3, color=brown, axes=BOXED, labels=[x, y, t])`

