

Den komplekse gættemetode

2. ordens lineær differentiaalligning med konstante koefficienter

eNote 18 afsnit 18.3.3, metode 18.17, eksempel 18.18

Differentiaalligning:

$$x''(t) - 2 \cdot x'(t) - 2 \cdot x(t) = 19 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \cos(t) - 35 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \sin(t)$$

Højresiden kan skrives:

$$19 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \cos(t) - 35 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \sin(t) = 19 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \operatorname{Re}(e^{i \cdot t}) - 35 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \operatorname{Im}(e^{i \cdot t}) = 19 \cdot \operatorname{Re}(e^{(4+i) \cdot t}) - 35 \cdot \operatorname{Im}(e^{(4+i) \cdot t}) =$$

$$19 \cdot \operatorname{Re}(e^{(4+i) \cdot t}) + 35 \cdot \operatorname{Re}(i \cdot e^{(4+i) \cdot t}) = \operatorname{Re}((19 + i \cdot 35) \cdot e^{(4+i) \cdot t})$$

$$\text{dvs. } 19 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \cos(t) - 35 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \sin(t) = \operatorname{Re}((19 + i \cdot 35) \cdot e^{(4+i) \cdot t})$$

Bemærk fortegnsskiftet foran 35!

$$\text{Gæt: } x_{\text{PARTIKULÆR}}(t) = \operatorname{Re}(c \cdot e^{(4+i) \cdot t}) \text{ hvor } c \in \mathbb{C}$$

NB: eNoten opererer med et mere besværligt udtryk:

$$x_{\text{PARTIKULÆR}}(t) = \operatorname{Re}((c + id) \cdot e^{(4+i) \cdot t}) \text{ hvor } c, d \in \mathbb{R}$$

Jeg foretrækker en **kompleks** konstant c .

Så skal man kun løse én kompleks ligning frem for 2 reelle ligninger.

Med simuleret håndregning får man:

> restart

Reel differentiaalligning:

$$\text{> DiffLignR} := x''(t) - 2 \cdot x'(t) - 2 \cdot x(t) = 19 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \cos(t) - 35 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \sin(t)$$

$$\text{DiffLignR} := D^{(2)}(x)(t) - 2 D(x)(t) - 2 x(t) = 19 e^{4t} \cos(t) - 35 e^{4t} \sin(t) \quad (1)$$

Kompleks differentiaalligning:

$$\text{> DiffLignC} := x''(t) - 2 \cdot x'(t) - 2 \cdot x(t) = (19 + I \cdot 35) \cdot e^{(4+I) \cdot t}$$

$$\text{DiffLignC} := D^{(2)}(x)(t) - 2 D(x)(t) - 2 x(t) = (19 + 35 I) e^{(4+I) t} \quad (2)$$

Gættede løsning, hvor c er et komplekst tal:

$$\text{> xGÆT} := t \mapsto c \cdot e^{(4+I) \cdot t}$$

$$x_{\text{GÆT}} := t \mapsto c e^{(4+I) t} \quad (3)$$

> subs(x = xGÆT, DiffLignC)

$$D^{(2)}(x_{\text{GÆT}})(t) - 2 D(x_{\text{GÆT}})(t) - 2 x_{\text{GÆT}}(t) = (19 + 35 I) e^{(4+I) t} \quad (4)$$

> simplify(%)

$$(5 + 6 I) c e^{(4+I) t} = (19 + 35 I) e^{(4+I) t} \quad (5)$$

I denne ligning kan eksponential-funktionen forkortes væk.

Ligningen kan løses mht. c :

> c := solve(%, c)

$$c := 5 + I \quad (6)$$

> xGÆT(t)

$$(5 + I) e^{(4+I) t} \quad (7)$$

> $\text{Re}(xG\text{ÆT}(t))$

$$\Re((5 + i) e^{(4 + i)t}) \quad (8)$$

> $\text{evalc}(\%)$

$$5 e^{4t} \cos(t) - e^{4t} \sin(t) \quad (9)$$

Den partikulære løsning er således: $\underline{5 e^{4t} \cos(t) - e^{4t} \sin(t)}$

Tjek med Maple

Test at det faktisk er en løsning til den givne **reelle** differentiaalligning:

> $x\text{PARTIKULÆR} := \text{unapply}(\%, t) :$

> $x\text{PARTIKULÆR}(t)$

$$5 e^{4t} \cos(t) - e^{4t} \sin(t) \quad (1.1)$$

> $\text{subs}(x = x\text{PARTIKULÆR}, \text{DiffLignR})$

$$D^{(2)}(x\text{PARTIKULÆR})(t) - 2 D(x\text{PARTIKULÆR})(t) - 2 x\text{PARTIKULÆR}(t) = 19 e^{4t} \cos(t) - 35 e^{4t} \sin(t) \quad (1.2)$$

> $\text{simplify}(\%)$

$$e^{4t} (19 \cos(t) - 35 \sin(t)) = e^{4t} (19 \cos(t) - 35 \sin(t)) \quad (1.3)$$

OK. Det passer!

Generel metode

Hvis højre siden er $= a \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) - b \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

kan den skrives på kompleks form som $= \text{Re}((a + b \cdot i) \cdot e^{(\alpha + \omega \cdot i) \cdot t})$

Så anvendes som gæt denne funktion $xG\text{ÆT}(t) = c \cdot e^{(\alpha + \omega \cdot i) \cdot t}$

som indsættes som $x(t)$ i den **komplekse udgave af differentiaalligningen**:

$$x''(t) - 2 \cdot x'(t) - 2 \cdot x(t) = (a + b \cdot i) \cdot e^{(\alpha + \omega \cdot i) \cdot t}$$

Når c er fundet, så er den partikulære løsning givet ved:

$$x\text{PARTIKULÆR}(t) = \text{Re}(xG\text{ÆT}(t))$$

Løsningen på formen $A \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$ hvis $\alpha = 0$

Hvis $\alpha = 0$ vil løsningen vil så være en ren kombination af sin og cos. Dvs. eksponentialleddet vil mangle.

Man kan så omskrive løsningen til formen $A \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$ ved at anvende denne beskrivelse: <https://steen-toft.dk/mat/dtu/20152016/tema/amplitud.pdf>

Men man kan slippe lettere om ved det!

Hvis $\alpha = 0$ så bliver løsningen på formen $c \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$.

c kan omskrives til $|c| \cdot e^{i \cdot \theta}$, hvor $|c|$ er modulus af c og θ er argumentet til c .

Derfor kan den **komplekse løsning** skrives $c \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = |c| \cdot e^{i \cdot \theta} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = |c| \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \theta)}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Den reelle løsning fås så som realdelen, dvs.} \\ \operatorname{Re}(|c| \cdot e^{i(\omega \cdot t + \theta)}) = |c| \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = |c| \cdot \cos(\omega \cdot t + \arg(c)) . \end{array} \right.$$