Anvendelse af tangentielt kurveintegral: Gravitation

Praktisk anvendelse i fysik af eNote, som omhandler *tangentielle kurveintegraler.*

http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_universal_gravitation

http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_field

http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_potential

http://en.wikipedia.org/wiki/Potential_energy

Gravitationskraften er givet ved: $\boldsymbol{F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}$ (skalarform) og $\boldsymbol{\vec{F}_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r}}$ (vektorform)
hvor r er afstanden fra f.eks. en planet med massen M, og m er massen af legemet, som påvirkes af planetens massetiltrækning.

Gravitationskraften giver anledning til begrebet **potentiel energi**: $\boldsymbol{E_{pot} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}$
NB: Den potentielle energi er negativ, og nærmer sig 0 uendelig langt væk.

```
> restart
> with(VektorAnalyse2)
```

$$[div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop] \tag{1}$$

$\vec{F}_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r}$ implementeres:

$$> Fgrav := (x, y, z) \to -G \cdot \frac{M \cdot m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \langle x, y, z\rangle : Fgrav(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{G\,M\,m\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ -\frac{G\,M\,m\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ -\frac{G\,M\,m\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Kraftens arbejde beregnes som det ***tangentielle kurveintegral*** fra punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ til uendelig,
idet nulpunktet for den potentielle energi placeres i uendelig.

Her anvendes sætning 25.2:

Sætning 25.2

Det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x,y,z)$ langs $K_\mathbf{r}$ kan beregnes således:

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{V},K_\mathbf{r}) = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u))\cdot\mathbf{r}'(u)\,du \quad . \tag{25-7}$$

Parametrisering, hvor $u \in [1,\infty[$ (NB: når $u=1$ er man i P_0) :

> $R := u \rightarrow \langle x0\cdot u, y0\cdot u, z0\cdot u\rangle$

$$R := u \mapsto \langle x0\,u, y0\,u, z0\,u\rangle \tag{3}$$

> $diff\sim(R(u),u)$

$$\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

> $Fgrav(vop(R(u)))$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{G\,M\,m\,x0\,u}{\left(x0^2\,u^2+y0^2\,u^2+z0^2\,u^2\right)^{3/2}} \\ -\dfrac{G\,M\,m\,y0\,u}{\left(x0^2\,u^2+y0^2\,u^2+z0^2\,u^2\right)^{3/2}} \\ -\dfrac{G\,M\,m\,z0\,u}{\left(x0^2\,u^2+y0^2\,u^2+z0^2\,u^2\right)^{3/2}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

> $prik(\mathbf{(4)}, \mathbf{(5)})$

$$-\frac{x0^2\,G\,M\,m\,u}{\left(x0^2\,u^2+y0^2\,u^2+z0^2\,u^2\right)^{3/2}} - \frac{y0^2\,G\,M\,m\,u}{\left(x0^2\,u^2+y0^2\,u^2+z0^2\,u^2\right)^{3/2}} - \frac{z0^2\,G\,M\,m\,u}{\left(x0^2\,u^2+y0^2\,u^2+z0^2\,u^2\right)^{3/2}} \tag{6}$$

> $simplify(\mathbf{(6)})$ assuming $u > 0$

$$-\frac{G\,M\,m}{\sqrt{x0^2+y0^2+z0^2}\;u^2} \tag{7}$$

> $A := \displaystyle\int_1^\infty \mathbf{(7)}\,\mathrm{d}u$

$$A := -\frac{G\,M\,m}{\sqrt{x0^2+y0^2+z0^2}} \tag{8}$$

Gravitationskraftens arbejde er altså givet ved: $\boldsymbol{A = -G\cdot \dfrac{M\cdot m}{r}}$, hvor $r = \sqrt{x0^2+y0^2+z0^2}$ er afstanden fra origo til punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Dette arbejde kaldes den potentielle energi: $\boldsymbol{E_{pot} = -G\cdot \dfrac{M\cdot m}{r}}$

Den potentielle energi

E_{pot} er en skalarfunktion, og gradientfeltet af $-E_{pot}$ er gravitationskraften $\vec{F}_{grav}$

> $Epot := (x, y, z) \rightarrow -G \cdot \frac{M \cdot m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} : Epot(x, y, z)$

$$-\frac{G\,M\,m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{9}$$

> $grad(-Epot(x, y, z), [x, y, z])$

$$\begin{bmatrix} -\frac{G\,M\,m\,x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{G\,M\,m\,y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{G\,M\,m\,z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \tag{10}$$

> **(2)**$-$**(10)**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Formel **(10)** er altså præcis formel **(2)**, så svaret bliver altså:

Gradienten af $-E_{pot} = \nabla\left(-E_{pot}\right) = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} = \vec{F}_{grav}$

Fordi gravitationskraften er et gradientvektorfelt, så bliver kraftens arbejde (det tangentielle kurveintegral) uafhængig af vejen.
Det betyder, at arbejdet langs en lukket kurve er 0.
Kraften kaldes så **konservativ**.

Det er kun for konservative kraftfelter, at begrebet potentiel energi giver mening!

Andre konservative krafter er: den elektriske kraft fra en punktladning (givet ved Coulombs lov) og fjederkraften (givet ved Hookes lov).

http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_law

http://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law

Ikke-konservative krafter er: gnidning og luftmodstand. Her er arbejdet altid *negativt* uanset vejen!

http://en.wikipedia.org/wiki/Friction

http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)

Gravitationskraftens arbejde fra punkt P_1 til punkt P_2 er givet ved:

$$A_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{grav} \cdot \vec{dr} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot \vec{dr} + \int_{\infty}^{P_2} \vec{F}_{grav} \cdot \vec{dr} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot \vec{dr} - \int_{P_2}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot \vec{dr} = E_{pot}(P_1)$$
$$- E_{pot}(P_2) = -\Delta E_{pot} = \Delta(-E_{pot})$$

Gravitationskraftens arbejde kan altså udregnes alene som minus forskellen i potentiel energi.

Dette er i overensstemmelse med sætning 25.10:

Sætning 25.10 Tangentielt kurveintegral af et gradientvektorfelt

Lad $f(x,y,z)$ betegne en funktion af de tre variable i rummet, og lad $\mathbf{V}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ betegne gradientvektorfeltet for $f(x,y,z)$. Lad $K_{\mathbf{r}}$ være en glat parametriseret kurve fra et punkt p til et punkt q i rummet. Det tangentielle kurveintegral af $\nabla f(x,y,z)$ langs $K_{\mathbf{r}}$ afhænger kun af p og q og er uafhængig af kurven:

$$\operatorname{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) = f(q) - f(p) \quad . \tag{25-24}$$