

Eksempel på funktion af 2 variable, som har egentligt lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo, men som ikke har lokalt minimum i origo!

Eksemplet er hentet fra side 122 i bogen "Counterexamples in Analysis":

http://books.google.com/books?id=cDAMh5n4lkkC&printsec=frontcover&hl=da&source=gbs_navlinks_s#v=onepage&q=&f=false

13. A differentiable function of two variables possessing no extremum at the origin but for which the restriction to an arbitrary line through the origin has a strict relative minimum there.

The function

$$f(x, y) \equiv (y - x^2)(y - 3x^2)$$

has no relative extremum at the origin since there are points of the form $(0, b)$ arbitrarily near the origin at which f is positive, and also points of the form $(a, 2a^2)$ arbitrarily near the origin at which f is negative. If the domain of f is restricted to the x axis, the restricted function $3x^4$ has a strict absolute minimum at $x = 0$. If the domain of f is restricted to the y axis, the restricted function y^2 has a strict absolute minimum at $y = 0$. If the domain of f is restricted to the line $y = mx$ through the origin where $0 < |m| < +\infty$, the restricted function of the parameter x :

$$g(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$$

has a strict relative minimum at the origin since $g'(0) = 0$ and $g''(0) = 2m^2 > 0$.

```
> restart
```

```
> with(plots) : with(plottools) :
```

```
> f := (x, y) -> (y - x^2) * (y - 3 * x^2)
```

$$f := (x, y) \mapsto (-x^2 + y) (-3x^2 + y)$$

(1)

Ikke lokalt minimum i origo

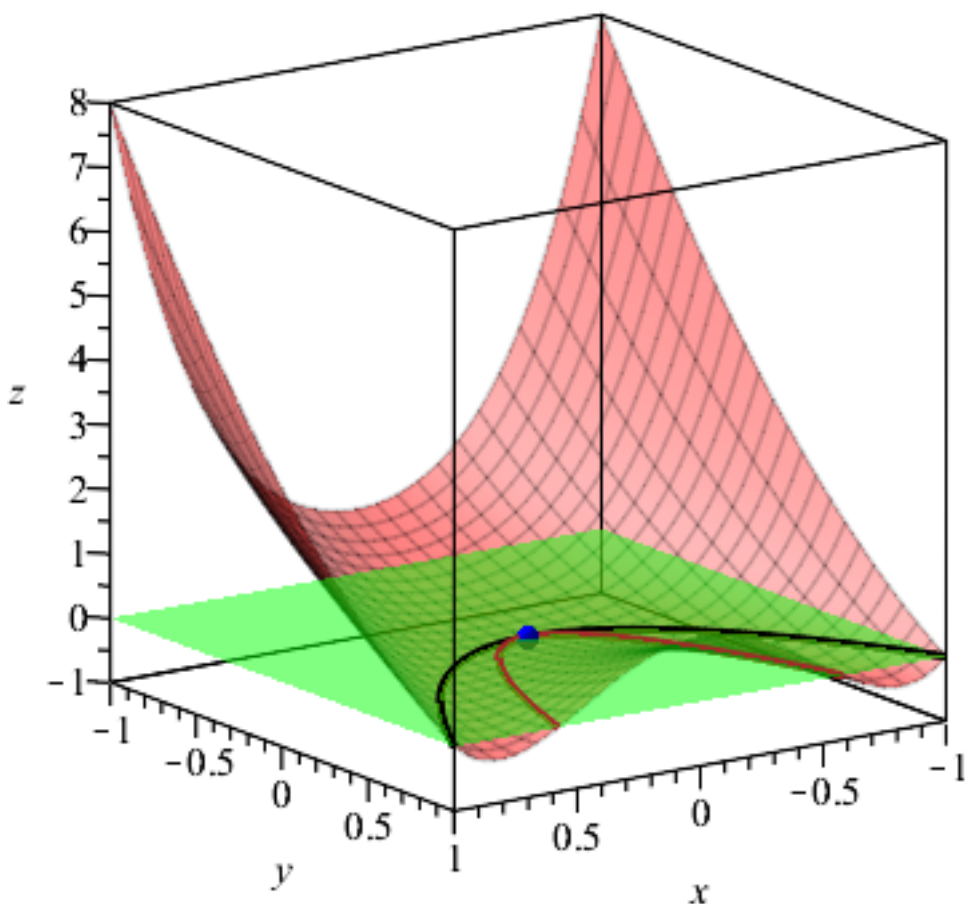
Grafisk bevis

```
> graf := plot3d(f(x, y), x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, axes = boxed, labels = [x, y, z], color = red, transparency = 0.5) :
```

```

gulv := implicitplot3d(z=0, x=-1..1, y=-1..1, z=-1..1, color=green, transparency
=0.5, style=patchnogrid) :
parabell := spacecurve(⟨t, t2, 0⟩, t=-1..1, color=black, thickness=3) :
parabel2 := spacecurve(⟨t, 3·t2, 0⟩, t=-1/√3..1/√3, color=brown, thickness
=3) :
origo := point([0, 0, 0], color=blue, symbol=solidsphere, symbolsize=20) :
display(graf, gulv, parabell, parabel2, origo)

```



Grafisk ses det tydeligt, når man drejer på figuren, at der **IKKE** er lokalt minimum i origo!

På de 2 parabler er funktionen 0, mens den er negativ mellem de 2 parabler. Ellers er funktionen positiv.

▼ Korrekt bevis

For at bevise det, ser man på 2 måder at nærme sig origo.

Dels på en parabel $y = 2 \cdot x^2$, som ligger imellem de 2 tegnede, dels på den rette linje $y = 0$.

> $g := x \rightarrow f(x, 2 \cdot x^2)$:

> $g(x)$

$$-x^4$$

(1.2.1)

Det er tydeligt, at funktionen er **negativ** på hele parablen $y = 2 \cdot x^2$ på nær i origo, hvor funktionen er 0.

> $h := x \rightarrow f(x, 0) :$

> $h(x)$

$$3x^4 \quad (1.2.2)$$

Det er tydeligt, at funktionen er **positiv** på hele den rette linje $y = 0$ på nær i origo, hvor funktionen er 0.

Hermed er det bevist, at $f(x, y)$ **IKKE** har lokalt minimum i origo.

Lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo

[Ser på restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$ gennem origo (NB: $a \in \mathbb{R}$).

Udtrykket inkluderer ikke den lodrette linje $x = 0$, som skal specialundersøges.

Lodret linje

> $i := y \rightarrow f(0, y) :$

> $i(y)$

$$y^2 \quad (2.1.1)$$

Det ses tydeligt, at der er egentligt lokalt minimum i origo, når man tager restriktionen til den lodrette linje $x = 0$ gennem origo.

Generel linje

> $j := x \rightarrow f(x, a \cdot x) :$

> $j(x)$

$$(ax - x^2)(ax - 3x^2) \quad (2.2.1)$$

> $j(0)$

$$0 \quad (2.2.2)$$

> $factor(j(x))$

$$x^2(a - x)(a - 3x) \quad (2.2.3)$$

> $solve(j(x) = 0, x)$

$$a, \frac{a}{3}, 0, 0 \quad (2.2.4)$$

$a = 0$ (vandret linje)

[Antag, at $a = 0$:

> $subs(a = 0, j(x))$

$$3x^4 \quad (2.2.1.1)$$

Funktionen har tydelig egentligt lokalt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = 0$.

$a > 0$ (positiv hældningskoefficient)

[Antag at $a > 0$:

Da $a > 0$, er 2 af rødderne positive.

Der er 3 forskellige rødder: 0 , $\frac{1}{3} \cdot a$ og a .

0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0 .

Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.

Da $a > 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $]-\infty; 0[$ og $]0; \frac{1}{3} \cdot a[$.

Derfor er der egentligt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a > 0$.

▼ $a < 0$ (negativ hældningskoefficient)

Antag at $a < 0$:

Da $a < 0$, er 2 af rødderne negative.

Der er 3 forskellige rødder: a , $\frac{1}{3} \cdot a$ og 0 .

0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0 .

Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.

Da $a < 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $]\frac{1}{3} \cdot a; 0[$ og $]0; \infty[$.

Derfor er der egentligt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a < 0$.

Generelt kan man sige, at - bortset fra den lodrette og den vandrette linje - vil **origo være minimum i intervallet** $]-\frac{1}{3} \cdot |a|, \frac{1}{3} \cdot |a|[$.