Den komplekse gættemetode

2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter
eNote 18 afsnit 18.3.3, metode 18.17, eksempel 18.18

Differentialligning:

$$x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \sin(t)$$

Højresiden kan skrives:

$19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \mathrm{Re}(e^{i\cdot t}) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \mathrm{Im}(e^{i\cdot t}) = 19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) - 35\cdot\mathrm{Im}(e^{(4+i)\cdot t}) =$
$19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) + 35\cdot\mathrm{Re}(i\cdot e^{(4+i)\cdot t}) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

dvs. $19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

Bemærk fortegnsskiftet foran 35!

Gæt: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(c\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ hvor $c \in \mathbb{C}$

NB: eNoten opererer med et mere besværligt udtryk:
$xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}((c+id)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ **hvor** $c, d \in \mathbb{R}$

Jeg foretrækker en kompleks konstant c.
Så skal man kun løse én kompleks ligning frem for 2 relle ligninger.

Med simuleret håndregning får man:

> *restart*

Reel differentialligning:

> $DiffLignR := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t)$

$$DiffLignR := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = 19\,e^{4t}\cos(t) - 35\,e^{4t}\sin(t) \quad (1)$$

Kompleks differentialligning:

> $DiffLignC := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (19 + I\cdot 35)\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$DiffLignC := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = (19+35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad (2)$$

Gættede løsning, hvor c er et komplekst tal:

> $xGÆT(t) := c\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$xGÆT := t \mapsto c\cdot e^{(4+I)\cdot t} \quad (3)$$

> $subs(x = xGÆT, DiffLignC)$

$$D^{(2)}(xGÆT)(t) - 2\,D(xGÆT)(t) - 2\,xGÆT(t) = (19+35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad (4)$$

> $simplify(\%)$

$$(5+6\,I)\,c\,e^{(4+I)\,t} = (19+35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad (5)$$

I denne ligning kan eksponential-funktionen forkortes væk.
Ligningen kan løses mht. c:

> $c := solve(\%, c)$

$$c := 5 + \mathrm{I} \tag{6}$$

> $xGÆT(t)$

$$(5 + \mathrm{I})\, \mathrm{e}^{(4+\mathrm{I})\, t} \tag{7}$$

> $\mathrm{Re}(xGÆT(t))$

$$\Re\left((5 + \mathrm{I})\, \mathrm{e}^{(4+\mathrm{I})\, t}\right) \tag{8}$$

> $evalc(\%)$

$$5\, \mathrm{e}^{4t} \cos(t) - \mathrm{e}^{4t} \sin(t) \tag{9}$$

Den partikulære løsning er således: $\underline{\underline{5\, \mathrm{e}^{4t} \cos(t) - \mathrm{e}^{4t} \sin(t)}}$

Tjek med Maple

Test at det faktisk er en løsning til den givne **reelle** differentialligning:

> $xPARTIKULÆR := unapply(\mathbf{(9)}, t)$:

> $xPARTIKULÆR(t)$

$$5\, \mathrm{e}^{4t} \cos(t) - \mathrm{e}^{4t} \sin(t) \tag{1.1}$$

> $subs(x = xPARTIKULÆR, DiffLignR)$

$$\mathrm{D}^{(2)}(xPARTIKULÆR)(t) - 2\, \mathrm{D}(xPARTIKULÆR)(t) - 2\, xPARTIKULÆR(t) = 19\, \mathrm{e}^{4t} \cos(t) - 35\, \mathrm{e}^{4t} \sin(t) \tag{1.2}$$

> $simplify(\%)$

$$\mathrm{e}^{4t}\, (19 \cos(t) - 35 \sin(t)) = \mathrm{e}^{4t}\, (19 \cos(t) - 35 \sin(t)) \tag{1.3}$$

OK. Det passer!

Generel metode

Hvis højre siden er = $a \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) - b \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$
kan den skrives på kompleks form som = $\mathrm{Re}\left((a + b \cdot i) \cdot \mathrm{e}^{(\alpha + \omega \cdot i) \cdot t}\right)$

Så anvendes som gæt denne funktion $xGÆT(t) = c \cdot \mathrm{e}^{(\alpha + \omega \cdot i) \cdot t}$
som indsættes som $x(t)$ i den **komplekse udgave af differentialligningen**:
$x''(t) - 2 \cdot x'(t) - 2 \cdot x(t) = (a + b \cdot i) \cdot \mathrm{e}^{(\alpha + \omega \cdot i) \cdot t}$

Når c er fundet, så er den partikulære løsning givet ved:
$xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(xGÆT(t))$

Løsningen på formen $A \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$ hvis $\alpha = 0$

Hvis $\alpha = 0$ vil løsningen vil så være en ren kombination af sin og cos. Dvs. eksponentialleddet vil mangle.

Man kan så omskrive løsningen til formen $A \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$ ved at anvende denne beskrivelse:
https://steen-toft.dk/mat/dtu/20152016/tema/amplitud.pdf

Men man kan slippe lettere om ved det!
Hvis $\alpha = 0$ så bliver løsningen på formen $c \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$.
c kan omskrives til $|c| \cdot e^{i \cdot \theta}$, hvor $|c|$ er modulus af c og θ er agumentet til c.

Derfor kan den **komplekse løsning** skrives $c \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = |c| \cdot e^{i \cdot \theta} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = |c| \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \theta)}$.
Den **reelle løsning** fås så som realdelen, dvs.
$\mathrm{Re}\left(|c| \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \theta)}\right) = |c| \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = \boldsymbol{|c| \cdot \cos(\omega \cdot t + arg(c))}$.