

Coulomb-feltet

```
> restart
> with(plots) :
> with(VektorAnalyse4)
      [div, grad, kryds, prik, rot, vop] (1.1)
```

```
> with(plot2D3D)
      [plot2D, plot3D] (1.2)
```

```
> V := (x, y, z) -> <x, y, z> / (sqrt(x^2 + y^2 + z^2))^3 : 'V(x, y, z)' = V(x, y, z)
```

$$V(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Cylinder givet ved: $z \in [-h, h]$ og $\rho \in [0, a]$ og $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi]$

```
> assume(a > 0, h > 0); assume(v, real); assume(u, real); interface(showassumed=0) :
```

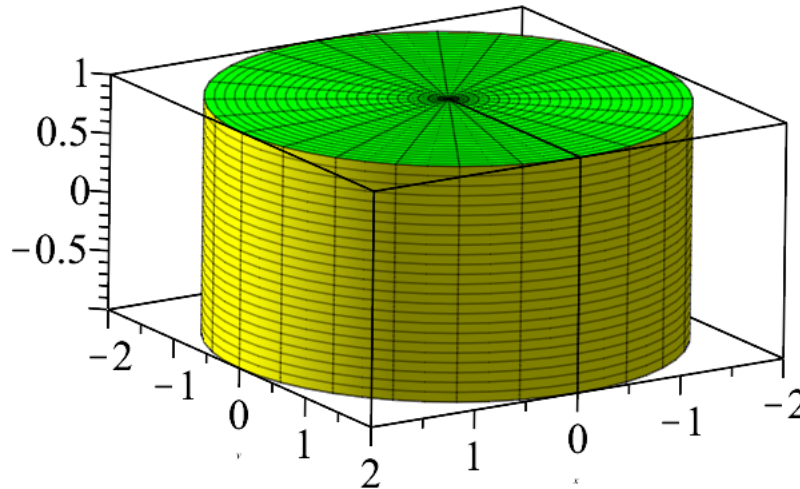
Parametrisering af den massive cylinder, hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2 \cdot \pi]$ og $w \in [-h, h]$:

```
> r := (u, v, w) -> <u * sin(v), u * cos(v), w> : 'r(u, v, w)' = r(u, v, w)
```

$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ w \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Vælger $a = 2$ og $h = 1$, så der kan tegnes:

```
> INT := [0, 2, 0, 2 * pi, -1, 1] :
> FARVER := [red, yellow, gray, gold, blue, green] :
> display(plot3D(r(u, v, w), INT, FARVER), labels = [x, y, z], axes = boxed, scaling
= constrained)
```



a) Divergensen

$$\begin{aligned} &> \operatorname{div}(V)(x, y, z) \\ &= \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

$$\begin{aligned} &> \operatorname{simplify}(\%) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Dvs. divergensen af V er 0. **Dog ikke defineret i origo!**

b) Fluxen

Integralet af divergensen over cylinderen er 0, da divergensen er 0.

MEN. Der er jo en **singularitet** i origo, og da origo ligger inde i cylinderen, så kan **Gauss' sætning IKKE anvendes!**

Forklaring: i Gauss' sætning er det en forudsætning, at vektorfeltet V er glat, dvs. differentiabel overalt. Derfor skal den også være defineret overalt.

Parametrisering af cylinderens krumme del, hvor $v \in [0, 2 \cdot \pi]$ og $w \in [-h, h]$:

> $r1 := (v, w) \rightarrow \langle a \cdot \cos(v), a \cdot \sin(v), w \rangle : 'r1(v, w)' = r1(v, w)$

$$r1(v, w) = \begin{bmatrix} a \cos(v) \\ a \sin(v) \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

> $\text{diff}(r1(v, w), v)$

$$\begin{bmatrix} -a \sin(v) \\ a \cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

> $\text{diff}(r1(v, w), w)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

> $N := \text{diff}(r1(v, w), v) \times \text{diff}(r1(v, w), w)$

$$N := \begin{bmatrix} a \cos(v) \\ a \sin(v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

> $\text{Integrand1} := N \cdot V(\text{vop}(r1(v, w)))$

$$\text{Integrand1} := \frac{a^2 \cos(v)^2}{(a^2 \cos(v)^2 + a^2 \sin(v)^2 + w^2)^{3/2}} + \frac{a^2 \sin(v)^2}{(a^2 \cos(v)^2 + a^2 \sin(v)^2 + w^2)^{3/2}} \quad (1.2.5)$$

> $\text{Flux1} := \int_0^{2 \cdot \pi} \left(\int_{-h}^h \text{Integrand1} \, dw \right) \, dv$

$$\text{Flux1} := \frac{4 h \pi}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (1.2.6)$$

Parametrisering af **endeflader** (cirkel), hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2 \cdot \pi]$:

> $r2 := (u, v) \rightarrow \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), h \rangle : 'r2(u, v)' = r2(u, v); \#TOP;$

$r3 := (u, v) \rightarrow \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), -h \rangle : 'r3(u, v)' = r3(u, v); \#BUND$

$$r2(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ h \end{bmatrix}$$

(1.2.7)

$$r3(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ -h \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

Normalvektoren til $r1$ skal gå opad, normalevektoren til $r2$ skal gå nedad. Så går de begge UD af cylinderen!

> $N2 := \text{simplify}(\text{diff}(r2(u, v), u) \times \text{diff}(r2(u, v), v));$
 $N3 := -\text{simplify}(\text{diff}(r3(u, v), u) \times \text{diff}(r3(u, v), v))$

$$N2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$$N3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{bmatrix}$$

(1.2.8)

> $\text{Integrand2} := N2 \cdot V(\text{vop}(r2(u, v)));$
 $\text{Integrand3} := N3 \cdot V(\text{vop}(r3(u, v)));$

$$\text{Integrand2} := \frac{u h}{(u^2 \cos(v)^2 + u^2 \sin(v)^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\text{Integrand3} := \frac{u h}{(u^2 \cos(v)^2 + u^2 \sin(v)^2 + h^2)^{3/2}}$$

(1.2.9)

> $\text{Flux2} := \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \text{Integrand2} \, dv \right) du;$
 $\text{Flux3} := \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \text{Integrand3} \, dv \right) du$

$$\text{Flux2} := \frac{2 \pi (\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$\text{Flux3} := \frac{2 \pi (\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

(1.2.10)

> $\text{Flux} := \text{Flux1} + \text{Flux2} + \text{Flux3}$

$$\text{Flux} := \frac{4 h \pi}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{4 \pi (\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

(1.2.11)

> $\text{simplify}(\%)$

$$4 \pi$$

(1.2.12)

Fluxen ud gennem cylinderen er givet ved $\underline{4 \cdot \pi}$

NB: uafhængig af parametrene a og h !

Fysikken

Coulombs lov siger, at **kraften** fra en ladning Q på en lille ladning q er: $\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot q \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$

hvor \vec{r} er vektoren imellem de 2 ladninger. Placeres Q i origo, er \vec{r} stedvektoren til q .
 ϵ_0 kaldes vacuumpermittiviteten.

Man definerer den **elektriske feltstørrelse** \vec{E} ved: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, altså som kraften pr. ladningsenhed.

$$\text{Dvs. } \vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Gauss' sætning giver så, at det ortogonale fladeintegral af \vec{E} over enhver lukket flade, som indeholder

$$\text{ladningen } Q = \int_{\text{flade}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

NB: Hvis fladen ikke indeslutter nogen ladning, så bliver svaret 0.

Se formlen blandt **Maxwells ligninger** til beskrivelse af **elektromagnetisme**:

https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations#Formulation_in_SI_units_convention

Lad os teste det med en kugleskal med centrum i origo.

Så er $\vec{E} \perp$ fladen, og $|\vec{E}|$ er konstant.

Derfor bliver fluxen ud gennem kugleskallen

$$= |\vec{E}| \cdot \text{KugleskalAreal} = \left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{|\vec{r}|}{r^3} \right) \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

I opgave 5 ovenfor var vektorfeltet $V(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r^3}$, dvs. $V = \frac{\vec{E}}{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot V$

Vi fandt ved udregning, at fluxen af V ud gennem cylinderen er: $4 \cdot \pi$.

Fluxen af \vec{E} ud gennem cylinderen er så: $\left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \right) \cdot (4 \cdot \pi) = \frac{Q}{\epsilon_0}$, hvilket passer med sætningen!