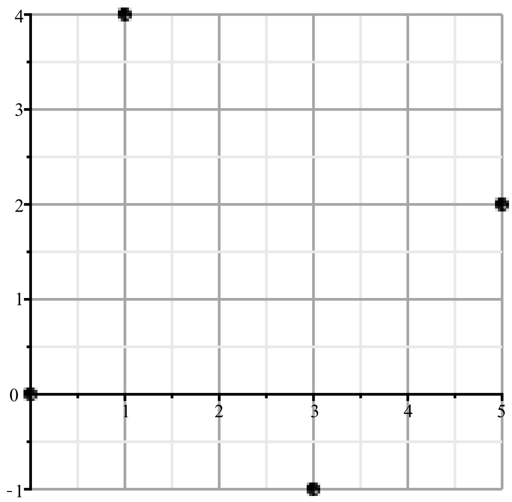
Parametrisering af firkanter

Eksempel på parametrisering af en firkant i $\mathbb{R}^2$

restart
with(*plots*) :
unprotect('D')

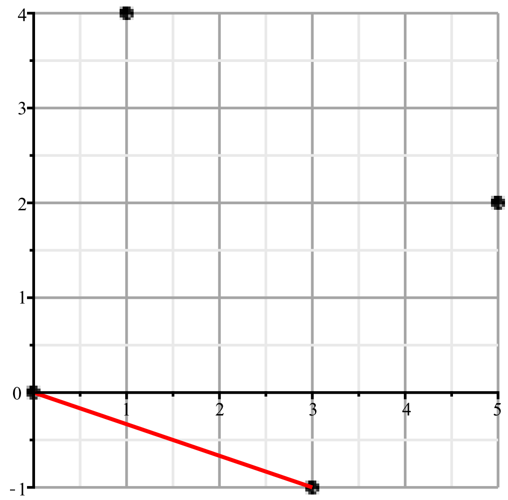
Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant □ABCD:
$A := \langle 0, 0\rangle : B := \langle 3, -1\rangle : C := \langle 5, 2\rangle : D := \langle 1, 4\rangle :$

$P := pointplot([A, B, C, D], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, gridlines)$



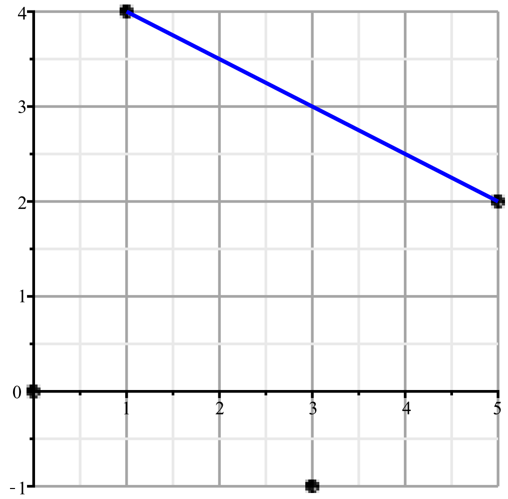
Parametriseringen af den rette linje mellem A og B:
$$r_{AB}(u) := \left\langle u, \frac{-1-0}{3-0}\cdot(u-0)+0\right\rangle :$$
hvor $u \in [0; 3]$.

$AB := plot\left([r_{AB}(u)[1], r_{AB}(u)[2], u = 0..3], color = red, gridlines\right) :$
$display(P, AB)$



Parametriseringen af den rette linje mellem D og C:
$$r_{DC}(u) := \left\langle u, \frac{2-4}{5-1}\cdot(u-1)+4\right\rangle :$$
hvor $u \in [1; 5]$.

$DC := plot\left([r_{DC}(u)[1], r_{DC}(u)[2], u = 1..5], color = blue, gridlines\right) :$
$display(P, DC)$



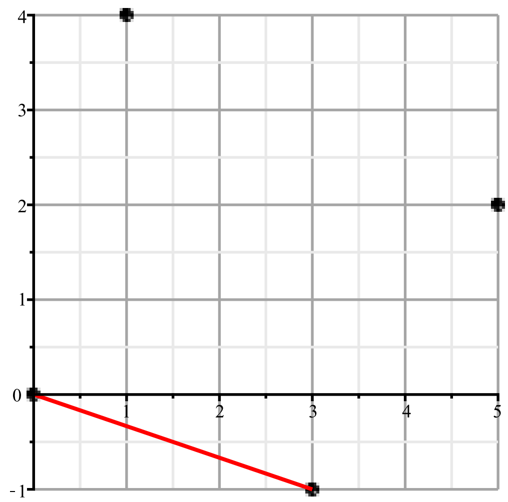
Nu skal man sørge for, at et løbende punkt på den røde linje AB gennemløbes i samme takt som den blå linje DC!

Vælger at parameteren u skal være i intervallet $[0; 1]$.
Når $u = 0$ skal man være i A hhv. D.
Når $u = 1$ skal man være i B hhv. C.

Skalerer u for AB-linjen, så den løber mellem 0 og 1:
$r_{AB2}(u) := r_{AB}((3 - 0) \cdot u + 0)$:

$$r_{AB2}(u) = \begin{bmatrix} 3\,u \\ -u \end{bmatrix}$$

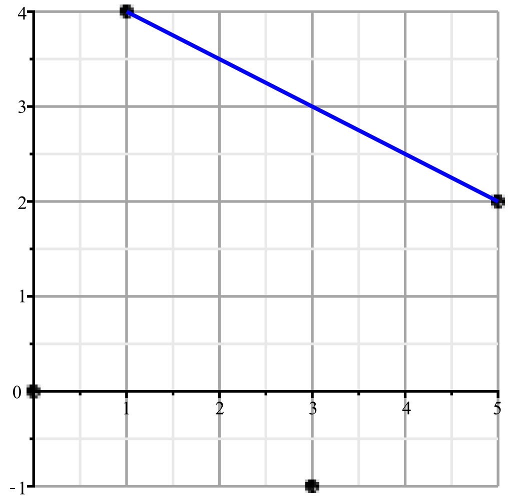
$AB2 := plot([r_{AB2}(u)[1], r_{AB2}(u)[2], u = 0..1], color = red, gridlines)$:
$display(P, AB2)$



Skalerer u for DC-linjen så den løber mellem 0 og 1:
$r_{DC2}(u) := r_{DC}((5 - 1) \cdot u + 1)$:

$$r_{DC2}(u) = \begin{bmatrix} 4\,u + 1 \\ -2\,u + 4 \end{bmatrix}$$

$DC2 := plot([r_{DC2}(u)[1], r_{DC2}(u)[2], u = 0..1], color = blue, gridlines)$:
$display(P, DC2)$



Parameterfremstillingerne af den **røde** og del **blå** linje gennemløber nu AB hhv. DC, når u løber fra 0 til 1!!!!

Forbinder så et punkt på den **røde** linje med punktet på den **blå** linje, som har samme u-værdi:

$r_{ABtilCD}(u) := r_{DC2}(u) - r_{AB2}(u)$:

$$r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} u+1 \\ -u+4 \end{bmatrix}$$

Denne vektors længde varieres mellem 0 og fuld længde via faktoren v:

$$v \cdot r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} v\,(u+1) \\ v\,(-u+4) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Få et få et punkt i firkanten skal punktet på AB adderes til vektoren:
$r_{ABCD}(u, v) := v \cdot r_{ABtilCD}(u) + r_{AB2}(u)$:

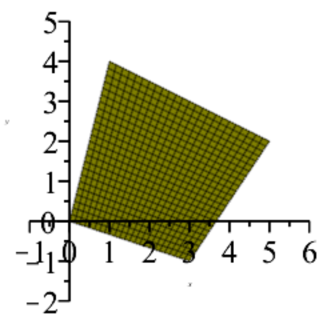
Parametriseringen af firkanten lyder:

$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v\,(u+1) + 3\,u \\ v\,(-u+4) - u \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Test af parametriseringen

$plot3d\left(\langle r_{ABCD}(u, v)[1], r_{ABCD}(u, v)[2], 0 \rangle, u = 0..1, v = 0..1, labels = [x, y, "\ "], axes = normal, orientation = [-90, 0], view = [-1..6, -2..5, -1..1], color = yellow \right)$



Det passer!!!!

Generel parametrisering af en firkant i $\mathbb{R}^2$

NB: Forudsætning er at firkanten er **konveks**.

restart
with(*plots*) :
unprotect('D')

Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant ▭ABCD:
$A := \langle a_1, a_2 \rangle : B := \langle b_1, b_2 \rangle : C := \langle c_1, c_2 \rangle : D := \langle d_1, d_2 \rangle :$

Parametriseringen af den rette linje mellem A og B:

$$r_{AB}(u) := \left\langle u, \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot (u - a_1) + a_2 \right\rangle :$$

u ligger mellem a_1 og b_1.

Parametriseringen af den rette linje mellem D og C:

$$r_{DC}(u) := \left\langle u, \frac{c_2 - d_2}{c_1 - d_1} \cdot (u - d_1) + d_2 \right\rangle :$$

hvor u ligger mellem d_1 og c_1.

Nu skal man sørge for, at et løbende punkt på linjen AB gennemløbes i samme takt som linjen DC!

Vælger at parameteren u skal være i intervallet $[0; 1]$.
Når $u = 0$ skal man være i A hhv. D.
Når $u = 1$ skal man være i B hhv. C.

Skalerer u for AB-linjen, så den løber mellem 0 og 1:
$r_{AB2}(u) := r_{AB}((b_1 - a_1) \cdot u + a_1) :$

$$r_{AB2}(u) = \begin{bmatrix} (b_1 - a_1)\, u + a_1 \\ (b_2 - a_2)\, u + a_2 \end{bmatrix}$$

Skalerer u for DC-linjen så den løber mellem 0 og 1:
$r_{DC2}(u) := r_{DC}((c_1 - d_1) \cdot u + d_1) :$

$$r_{DC2}(u) = \begin{bmatrix} (c_1 - d_1)\, u + d_1 \\ (c_2 - d_2)\, u + d_2 \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillingerne af den **røde** og del **blå** linje gennemløber nu AB hhv. DC, når u løber fra 0 til 1!!!!

Forbinder så et punkt på den **røde** linje med punktet på den **blå** linje, som har samme u-værdi:

$r_{ABtilCD}(u) := r_{DC2}(u) - r_{AB2}(u) :$

$$r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} (c_1 - d_1)\, u + d_1 - (b_1 - a_1)\, u - a_1 \\ (c_2 - d_2)\, u + d_2 - (b_2 - a_2)\, u - a_2 \end{bmatrix}$$

Denne vektors længde varieres mellem 0 og fuld længde via faktoren v:

$v \cdot r_{ABtilCD}(u) =$

$$\begin{bmatrix} v\left(\left(c_1-d_1\right)u+d_1-\left(b_1-a_1\right)u-a_1\right) \\ v\left(\left(c_2-d_2\right)u+d_2-\left(b_2-a_2\right)u-a_2\right) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0;1]$ og $v \in [0;1]$.

Få et få et punkt i firkanten skal punktet på AB adderes til vektoren:
$r_{ABCD}(u,v) := v \cdot r_{ABtilCD}(u) + r_{AB2}(u)$:

Parametriseringen af firkanten lyder:

$$r_{ABCD}(u,v) = \begin{bmatrix} v\left(\left(c_1-d_1\right)u+d_1-\left(b_1-a_1\right)u-a_1\right)+\left(b_1-a_1\right)u+a_1 \\ v\left(\left(c_2-d_2\right)u+d_2-\left(b_2-a_2\right)u-a_2\right)+\left(b_2-a_2\right)u+a_2 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0;1]$ og $v \in [0;1]$.

Test af parametriseringen

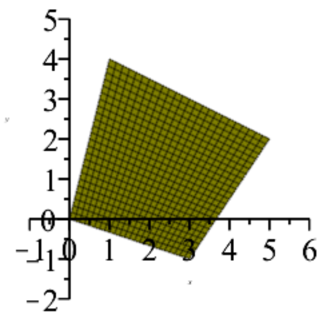
Eksempel 1:

Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant ▭ABCD:
$A := \langle 0,0\rangle : B := \langle 3,-1\rangle : C := \langle 5,2\rangle : D := \langle 1,4\rangle :$
Dvs:
$a_1 := 0 : a_2 := 0 : b_1 := 3 : b_2 := -1 : c_1 := 5 : c_2 := 2 : d_1 := 1 : d_2 := 4 :$

$$r_{ABCD}(u,v) = \begin{bmatrix} v\,(u+1)+3\,u \\ v\,(-u+4)-u \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0;1]$ og $v \in [0;1]$.

$plot3d\left(\left\langle r_{ABCD}(u,v)[1], r_{ABCD}(u,v)[2], 0\right\rangle, u=0..1, v=0..1, labels=[x,y," "], axes=normal, orientation=[-90,0], view=[-1..6,-2..5,-1..1], color=yellow\right)$



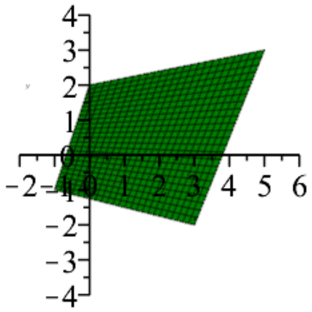
Eksempel 2:

Givet 4 andre punkter, som udspænder en firkant ▭ABCD:
$A := \langle -1,-1\rangle : B := \langle 3,-2\rangle : C := \langle 5,3\rangle : D := \langle 0,2\rangle :$
Dvs:
$a_1 := -1 : a_2 := -1 : b_1 := 3 : b_2 := -2 : c_1 := 5 : c_2 := 3 : d_1 := 0 : d_2 := 2 :$

$$r_{ABCD}(u,v) = \begin{bmatrix} v\,(u+1)+4\,u-1 \\ v\,(2\,u+3)-u-1 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0;1]$ og $v \in [0;1]$.

$plot3d\left(\langle r_{ABCD}(u,v)[1], r_{ABCD}(u,v)[2], 0\rangle, u=0..1, v=0..1, labels=[x,y,""], axes=normal, orientation=[-90,0], view=[-2..6,-4..4,-1..1], color=green\right)$



Det passer!!!!

Generel parametrisering af en 'firkant' med 2 buede sider i $\mathbb{R}^2$

restart
with(*plots*) :
unprotect('D')

Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant ▭ABCD:
$A := \langle a_1, a_2\rangle : B := \langle b_1, b_2\rangle : C := \langle c_1, c{:}_2\rangle : \mathrm{D} := \langle d_1, d_2\rangle :$

Parametriseringen af den buede forbindelseslinje mellem A og B:
$r_{AB}(u) := \langle u, f(u)\rangle :$
u ligger mellem a_1 og b_1.
f skal opfylde, at $f(a_1) = a_2$ og $f(b_1) = f(b_2)$.

Parametriseringen af den rette linje mellem D og C:
$r_{DC}(u) := \langle u, g(u)\rangle :$
hvor u ligger mellem d_1 og c_1.
g skal opfylde, at $f(d_1) = d_2$ og $f(c_1) = f(c_2)$.

Nu skal man sørge for, at et løbende punkt på linjen AB gennemløbes i samme takt som linjen DC!

Vælger at parameteren u skal være i intervallet $[0; 1]$.
Når $u = 0$ skal man være i A hhv. D.
Når $u = 1$ skal man være i B hhv. C.

Skalerer u for AB-linjen, så den løber mellem 0 og 1:
$r_{AB2}(u) := r_{AB}((b_1 - a_1)\cdot u + a_1) :$

$$r_{AB2}(u) = \begin{bmatrix} (b_1 - a_1)\,u + a_1 \\ f((b_1 - a_1)\,u + a_1) \end{bmatrix}$$

Skalerer u for DC-linjen så den løber mellem 0 og 1:
$r_{DC2}(u) := r_{DC}((c_1 - d_1)\cdot u + d_1) :$

$r_{DC2}(u) =$

$$\begin{bmatrix} (c_1 - d_1)\,u + d_1 \\ g((c_1 - d_1)\,u + d_1) \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillingerne af den **røde** og del **blå** linje gennemløber nu AB hhv. DC, når u løber fra 0 til 1!!!!

Forbinder så et punkt på den **røde** linje med punktet på den **blå** linje, som har samme u-værdi:

$r_{ABtilCD}(u) := r_{DC2}(u) - r_{AB2}(u)$:

$$r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} (c_1 - d_1)\,u + d_1 - (b_1 - a_1)\,u - a_1 \\ g((c_1 - d_1)\,u + d_1) - f((b_1 - a_1)\,u + a_1) \end{bmatrix}$$

Denne vektors længde varieres mellem 0 og fuld længde via faktoren v:

$$v \cdot r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} v\,((c_1 - d_1)\,u + d_1 - (b_1 - a_1)\,u - a_1) \\ v\,(g((c_1 - d_1)\,u + d_1) - f((b_1 - a_1)\,u + a_1)) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Få et få et punkt i firkanten skal punktet på AB adderes til vektoren:
$r_{ABCD}(u, v) := v \cdot r_{ABtilCD}(u) + r_{AB2}(u)$:

Parametriseringen af firkanten lyder:

$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v\,((c_1 - d_1)\,u + d_1 - (b_1 - a_1)\,u - a_1) + (b_1 - a_1)\,u + a_1 \\ v\,(g((c_1 - d_1)\,u + d_1) - f((b_1 - a_1)\,u + a_1)) + f((b_1 - a_1)\,u + a_1) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Test af parametriseringen

$f(x) := -2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot x\right) + 2$:

$a_1 := 0$:

$a_2 := f(a_1) = 2$

$b_1 := 3$:

$b_2 := f(b_1) = -2\sin(2) + 2$

$evalf(b_2) = 0.181405146$

$g(x) := 4 - \frac{1}{50} \cdot e^x$:

$c_1 := 5$:

$c_2 := g(c_1) = 4 - \frac{1}{50}\,e^5$

$evalf(c_2) = 1.031736818$

$d_1 := 1$:

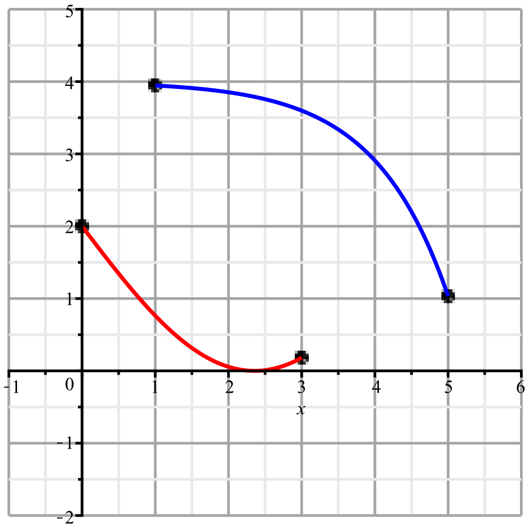
$d_2 := g(d_1) = 4 - \frac{1}{50}\,e$

$evalf(d_2) = 3.945634363$

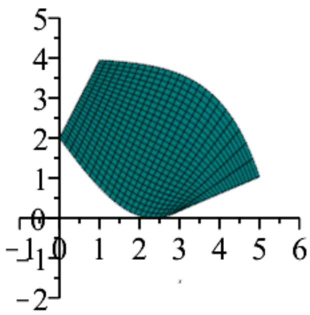
$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v\,(u + 1) + 3\,u \\ v\left(2 - \frac{e^{4u+1}}{50} + 2\sin(2\,u)\right) - 2\sin(2\,u) + 2 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

$P := pointplot\left(\left[\left[a_1, a_2\right], \left[b_1, b_2\right], \left[c_1, c_2\right], \left[d_1, d_2\right]\right], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, gridlines\right) :$
$AB := plot\left(f(x), x = a_1 \,..\, b_1, color = red, gridlines\right) :$
$DC := plot\left(g(x), x = d_1 \,..\, c_1, color = blue, gridlines\right) :$
$display(P, AB, DC, view = [-1 \,..\, 6, -2 \,..\, 5])$



$plot3d\left(\left\langle r_{ABCD}(u, v)[1], r_{ABCD}(u, v)[2], 0\right\rangle, u = 0 \,..\, 1, v = 0 \,..\, 1, labels = [x, y, " "], axes = normal, orientation = [-90, 0], view = [-1 \,..\, 6, -2 \,..\, 5, -1 \,..\, 1], color = cyan\right)$



Det passer!!!!