

Jacobi-matrix og Jacobi-faktor i integralregning

▼ Kurve i \mathbb{R}^2 eller i \mathbb{R}^3 (Jacobi-faktor anvendes til beregning af længde)

\mathbb{R}^2

> restart

Parametrisering (eksempel):

NB: 1 parameter beskriver en kurve i \mathbb{R}^2 .

> $r(u) := \langle 2 \cdot u^2, u + 2 \rangle :$
 $'r(u)' = r(u)$

$$r(u) = \begin{bmatrix} 2u^2 \\ u + 2 \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'|$

> $Jacobi := LinearAlgebra[Norm](diff(r(u), u), 2)$

$$Jacobi := \sqrt{1 + 16|u|^2} \quad (1.1.2)$$

NB: Man må overveje om numerisk værdi kan hæves på kurven.

\mathbb{R}^3

> restart

Parametrisering (eksempel):

NB: 1 parameter beskriver en kurve i \mathbb{R}^3 .

> $r(u) := \langle 2 \cdot u^2, u + 2, \frac{1}{u} \rangle :$
 $'r(u)' = r(u)$

$$r(u) = \begin{bmatrix} 2u^2 \\ u + 2 \\ \frac{1}{u} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'|$

> $Jacobi := LinearAlgebra[Norm](diff(r(u), u), 2)$

$$Jacobi := \sqrt{1 + 16|u|^2 + \frac{1}{|u|^4}} \quad (1.2.2)$$

NB: Man må overveje om numerisk værdi kan hæves på kurven.

▼ Plant område i \mathbb{R}^2 (Jacobi-faktor anvendes til beregning af areal)

> restart

Parametrisering (eksempel):

NB: 2 parametre beskriver plant område i \mathbb{R}^2 .

> $r(u, v) := \langle u, v \cdot u^3 \rangle :$

> $'r(u, v)' = r(u, v)$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v u^3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Jacobi-matricen:

(består af de partielle afledede opsat som søjler i en 2 x 2 matrix)

> $J := \text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v), [u, v])$

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 v u^2 & u^3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Jacobi-faktoren:

> $\text{Jacobi} := \text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](J)$

$$\text{Jacobi} := u^3 \quad (2.3)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|\det(r'_u, r'_v)|$

> $\text{Jacobi} := \text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](\text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v), [u, v]))$

$$\text{Jacobi} := u^3 \quad (2.4)$$

NB: Evt. skal man tage den numeriske værdi!

> $\text{Jacobi} := |\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](\text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v), [u, v]))|$

$$\text{Jacobi} := |u|^3 \quad (2.5)$$

Plan-integral beregnet som et flade-integral

Hvis man har givet et plant område i \mathbb{R}^2 kan man faktisk beregne arealet som et fladeintegral frem for et planintegral.

Det gør man blot ved at udvide parametriseringen med 3. koordinaten $z = 0$.

Eksemplet ovenfor anvendes.

> *restart*

> $r(u, v) := \langle u, v \cdot u^3 \rangle :$

> $'r(u, v)' = r(u, v)$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v u^3 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Udvidet parametrisering:

> $R(u, v) := \langle u, v \cdot u^3, 0 \rangle :$

> $'R(u, v)' = R(u, v)$

$$R(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v u^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'_u \times r'_v|$

> $\text{Jacobi} := \text{LinearAlgebra}[\text{Norm}](\text{diff}(R(u, v), u) \times \text{diff}(R(u, v), v), 2)$

$$\text{Jacobi} := |u|^3 \quad (2.1.3)$$

Altså samme resultat som ved brug af formelen for Jacobi-faktoren ved plan-integral.

Flade i \mathbb{R}^3 (Jacobi-faktor anvendes til beregning af areal)

> restart

Parametrisering (eksempel):

NB: 2 parametre beskriver flade i \mathbb{R}^3 .

> $r(u, v) := \langle u, v \cdot u^2, u \rangle :$

> $'r(u, v)' = r(u, v)$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v u^2 \\ u \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'_u \times r'_v|$

> $Jacobi := LinearAlgebra[Norm](diff(r(u, v), u) \times diff(r(u, v), v), 2)$

$$Jacobi := \sqrt{2} |u|^2 \quad (3.2)$$

NB: Man må overveje om numerisk værdi kan hæves på fladen.

Rumligt område i \mathbb{R}^3 (Jacobi-faktor anvendes til beregning af rumfang)

> restart

Parametrisering (eksempel):

NB: 3 parametre beskriver et område i \mathbb{R}^3 .

> $r(u, v, w) := \langle u, v \cdot u^3, w \cdot u \rangle :$

> $'r(u, v, w)' = r(u, v, w)$

$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \\ v u^3 \\ w u \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Jacobi-matricen:

(består af de partielle afledede opsat som søjler i en 3 x 3 matrix)

> $J := VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w])$

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 v u^2 & u^3 & 0 \\ w & 0 & u \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Jacobi-faktoren:

> $Jacobi := LinearAlgebra[Determinant](J)$

$$Jacobi := u^4 \quad (4.3)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|det(r'_u, r'_v, r'_w)|$

> $Jacobi := LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]))$

$$Jacobi := u^4 \quad (4.4)$$

NB: Evt. skal man tage den numeriske værdi!

> $Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]))|$

$$Jacobi := |u|^4 \quad (4.5)$$