Omskrivning af en kvadratisk form i 2 variable

Eksemplet er en uddybning af Eksempel 22.1 i eNote nr. 22

NB: Når du kører Maple-filen med !!! vil der ske det, at resultatet i ligning 8 kan komme ud på forskellige måde.
Det kan betyde, at de 2 egenværdier er ombyttet, og egenvektorerne har modsatte koordinater!

> *restart*

Transponering af matrix kan laves som potensopløftning med eksponenten %T, så ligner det den matematiske skrivemåde - blot med % foran T.

> $f(x,y) := 2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot x\cdot y - 8\cdot x - 10\cdot y + 13$

$$f := (x,y) \mapsto 2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot y\cdot x - 8\cdot x - 10\cdot y + 13 \qquad (1)$$

> $VectorCalculus[Jacobian](\langle f(x,y)\rangle, [x,y])$

$$\begin{bmatrix} 4x+2y-8 & 2x+4y-10 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

> $VectorCalculus[Hessian](f(x,y), [x,y])$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

> $H := \frac{1}{2}\cdot\%$

$$H := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Den kvadratiske form kan så skrives:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\cdot H\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

Formlen kontrolleres:

> $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}.H.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

$$(2x+y)\,x + (x+2y)\,y - 8x - 10y + 13 \qquad (5)$$

> $expand(\%)$

$$2x^2 + 2yx + 2y^2 - 8x - 10y + 13 \qquad (6)$$

Hvilket præcist er den givne kvadratiske form f.

Nu skal H diagonaliseres:

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](H, output='list')$

(7)

$$\left[\left[3, 1, \left\{\left[\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right]\right\}\right], \left[1, 1, \left\{\left[\begin{array}{c}-1\\1\end{array}\right]\right\}\right]\right] \quad (7)$$

Egenværdierne pilles ud:

> $e1 := \mathbf{(7)}[1, 1]$

$$e1 := 3 \quad (8)$$

> $e2 := \mathbf{(7)}[2, 1]$

$$e2 := 1 \quad (9)$$

Ombyt evt. så egenværdierne er i voksende rækkefølge:

> **if** $e1 > e2$ **then** $e3 := e1;\ e1 := e2;\ e2 := e3;\ v3 := v1;\ v1 := v2;\ v2 := v3$ **end if**:

Egenrummene står vinkelret på hinanden i følge teorien.

Egenvektorerne pilles ud og gøres til enhedsvektorer:

> $v1 := \mathbf{(7)}[1, 3, 1]$

$$v1 := \left[\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right] \quad (10)$$

> $v1 := LinearAlgebra[Normalize](v1, 2)$

$$v1 := \left[\begin{array}{c}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right] \quad (11)$$

> $v2 := \mathbf{(7)}[2, 3, 1]$

$$v2 := \left[\begin{array}{c}-1\\1\end{array}\right] \quad (12)$$

> $v2 := LinearAlgebra[Normalize](v2, 2)$

$$v2 := \left[\begin{array}{c}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right] \quad (13)$$

Diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen:

> $\Lambda := \left[\begin{array}{cc}e1 & 0\\0 & e2\end{array}\right]$

$$\Lambda := \left[\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 3\end{array}\right] \quad (14)$$

Ortogonale substitutionsmatrix:

> $Q := \langle v1 | v2 \rangle$

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(15)}$$

Hvis determinanten er -1, ombyttes søjlerne i Q (og egenvektorerne ombyttes):

> $LinearAlgebra[Determinant](Q)$

$$1 \qquad \textbf{(16)}$$

> **if** $Determinant(Q) = -1$ **then** $Q := \langle -v1 | v2 \rangle$ **end if**:

Som forventet giver $Q^T \cdot H \cdot Q$ diagonalmatricen Λ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(17)}$$

> $Q^{\%T}.H.Q$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(18)}$$

Håndregning for at bestemme typen af den kvadratiske form

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x_1, y_1)

I formlen $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$ **skal** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **erstattes af** $Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right)^T \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot (Q^T \cdot H \cdot Q) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9\cdot\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$3\cdot x_1^2 + y_1^2 - 9\cdot\sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1 + 13 =$$

Altså er vi sluppet af med det blandede 2. grads led, som hedder $2\cdot x\cdot y$

$$3\cdot x_1^2 + y_1^2 - 9\cdot\sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1 + 13 =$$
$$3\cdot\left(x_1^2 - 3\cdot\sqrt{2}\cdot x_1\right) + \left(y_1^2 - \sqrt{2}\cdot y_1\right) + 13 =$$
$$3\cdot\left(\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2\right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2\right) + 13 =$$
$$3\cdot\left(\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{9}{2}\right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) + 13 =$$
$$3\cdot\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{27}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 13 =$$
$$3\cdot\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - 1 =$$
$$\left(\frac{x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}{1}\right)^2 - 1$$

Dvs. $f(x,y) = 0$ er en ellipse med halvakserne $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1.

Ved brug af Maple (delvis håndregning)

I den kvadratiske form: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . H . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

erstattes de gamle koordinater (x, y) med nye koordinater $(x1, y1)$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}$

$$> \left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right)^{\%T} .H.\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right) + 13 = 0$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}\,x1}{2} - \frac{\sqrt{2}\,y1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\,x1}{2} - \frac{\sqrt{2}\,y1}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{2}\,x1}{2} + \frac{\sqrt{2}\,y1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\,x1}{2} + \frac{\sqrt{2}\,y1}{2}\right) - 9\sqrt{2}\,x1 - \sqrt{2}\,y1 + 13 = 0 \quad \textbf{(2.1)}$$

> *simplify*(%)

$$(-9\,x1 - y1)\sqrt{2} + 3\,x1^2 + y1^2 + 13 = 0 \quad \textbf{(2.2)}$$

> $Student[Precalculus][CompleteSquare](\%)$

$$\left(y1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(x1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=0 \qquad \textbf{(2.3)}$$

Beregnet effektivt med Maple

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x_1, y_1) :

$$XY := Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\,x_1}{2}-\frac{\sqrt{2}\,y_1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\,x_1}{2}+\frac{\sqrt{2}\,y_1}{2} \end{bmatrix}$$

Her lader man Maple lave arbejdet.
Indsætter i den oprindelige kvadratiske form uden at skulle skrive selv.

$subs(x=XY[1], y=XY[2], f(x,y)=0) =$

$$2\left(\frac{\sqrt{2}\,x_1}{2}-\frac{\sqrt{2}\,y_1}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}\,x_1}{2}+\frac{\sqrt{2}\,y_1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\,x_1}{2}-\frac{\sqrt{2}\,y_1}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}\,x_1}{2}+\frac{\sqrt{2}\,y_1}{2}\right)^2-9\sqrt{2}\,x_1-\sqrt{2}\,y_1+13=0$$

$expand(\%) = 3\,x_1^2+y_1^2-9\sqrt{2}\,x_1-\sqrt{2}\,y_1+13=0$

$Student[Precalculus][CompleteSquare](\%, [x_1, y_1]) =$

$$\left(y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(x_1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=0$$

Ellipsens centrum er $C1 = (x1_0, y1_0) = \left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ i de nye koordinater!
I gamle koordinater ligger centrum i punktet $C = (1, 2)$:

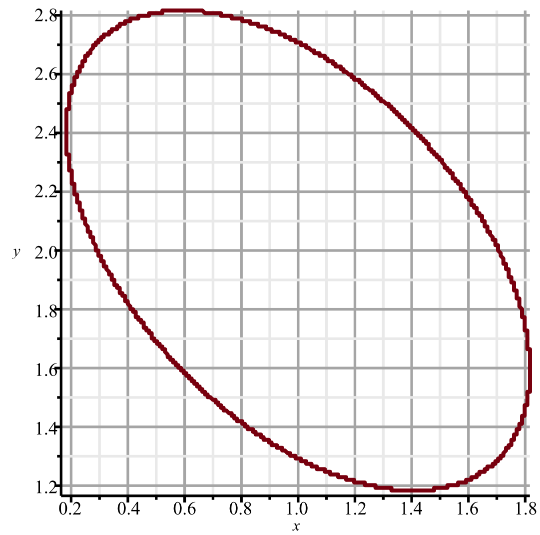
> $C := Q.\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

Ellipsen plottes:

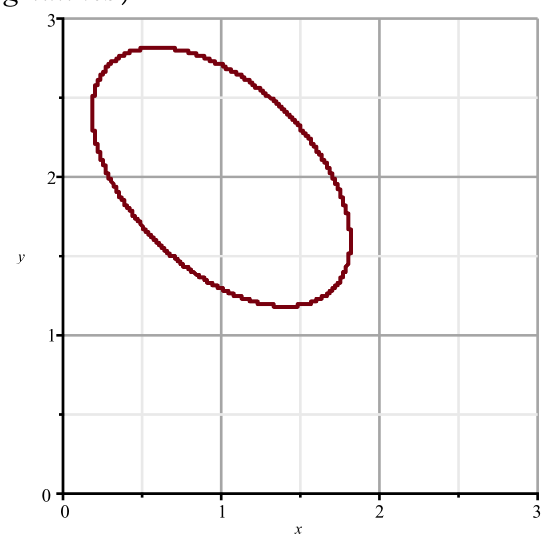
> $with(plots):$

> $implicitplot(2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot x\cdot y-8\cdot x-10\cdot y+13=0, x=0..2, y=1..3, numpoints=100000, gridlines)$



Origo bør ses på plottet:

> $implicitplot\left(2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot x\cdot y-8\cdot x-10\cdot y+13=0,\ x=0\,..2,\ y=1\,..3,\ numpoints=100000,\ view=[0\,..3,\ 0\,..3],\ gridlines\right)$



Centrum ligger i $C=(1,2)$.
Halvakserne går gennem centrum, og følger de nye koordinatakser!

Længden af halvakserne er fundet ovenfor som $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1. Husk at egenvektorerne er enshedsvektorer!
Halvakserne tegnes med en parameterfremstilling for et ret linjestykke.

Ellipsen tegnes med centrum og halvakser:

> $ellipse := implicitplot\left(2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot x\cdot y-8\cdot x-10\cdot y+13=0,\ x=0\,..2,\ y=1\,..3,\ numpoints=100000,\ color=red\right):$
$centrum := pointplot([1],[2],\ symbolsize=20,\ symbol=solidcircle,\ color=black):$
$lilleakse := plot\left(\left[C_1+t\cdot v1_1,\ C_2+t\cdot v1_2,\ t=-\frac{\sqrt{3}}{3}\,..\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right],\ color=blue\right):$
$storakse := plot\left(\left[C_1+t\cdot v2_1,\ C_2+t\cdot v2_2,\ t=-1\,..1\right],\ color=green\right):$

$display(ellipse, centrum, storakse, lilleakse, view = [0..3, 0..3], gridlines)$