

## 2. ordens differentiaalligninger med konstante koefficienter

### Generel algoritme til bestemmelse af en partikulær løsning, når højre siden er et polynomium

#### Opgave 3A og 3B, Uge 13, StoreDag

Betragt den lineære afbildning  $f : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  givet ved

$$f(x(t)) = x''(t) + 3x'(t) - 4x(t).$$

Gæt en partikulær løsning til den inhomogene differentiaalligning

A

$$f(x(t)) = 29 - 12t$$

og opstil derefter den fuldstændige løsning til ligningen.

$$f(X) := \text{diff}(X, t, t) + 3 \cdot \text{diff}(X, t) - 4 \cdot X:$$

$$f(x(t)) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 3 \frac{d}{dt} x(t) - 4 x(t)$$

$$f(\cos(t)) = -5 \cos(t) - 3 \sin(t)$$

$$\text{dsolve}(f(x(t)) = 0) = x(t) = \_C1 e^{-4t} + \_C2 e^t$$

Find ved gættemetode en partikulær løsning til den inhomogene differentiaalligning

B

$$f(x(t)) = \cos(t)$$

og opstil derefter den fuldstændige løsning til ligningen.

$$\text{dsolve}(f(x(t)) = \cos(t)) = x(t) = e^{-4t} \_C2 + e^t \_C1 - \frac{5 \cos(t)}{34} + \frac{3 \sin(t)}{34}$$

#### Simuleret håndregning, når højre side er $29 - 12 \cdot t$

restart

$$f(X) := \text{diff}(X, t, t) + 3 \cdot \text{diff}(X, t) - 4 \cdot X:$$

$$HS := 29 - 12 \cdot t = 29 - 12 t$$

$$G\ddot{A}E\ddot{T} := a \cdot t + b:$$

$$VS := f(G\ddot{A}E\ddot{T}) = -4 a t + 3 a - 4 b$$

$$L := \text{solve}(\{-4 \cdot a = -12, 3 \cdot a - 4 \cdot b = 29\}) = \{a = 3, b = -5\}$$

$$a := \text{rhs}(L[1]) : b := \text{rhs}(L[2]) :$$

$$G\ddot{A}E\ddot{T} = 3 t - 5$$

$$\text{Inhomogen partikulær løsning: } \underline{\underline{x(t) = 3 \cdot t - 5}}$$

Maple tjek:

$$\text{dsolve}(f(x(t)) = HS) = x(t) = e^t \_C2 + e^{-4t} \_C1 + 3 t - 5$$

## Generel algoritme, når den inhomogene del er et polynomium

Herunder vises, hvordan man kan programmere en generel algoritme i Maple, som finder den partikulære løsning!

Følger metode 18.6 i eNote 18.

### Metode 18.6 Polynomium

Givet den inhomogene differentiaalligning

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = q(t), \quad t \in I, \quad (18-32)$$

hvor  $q$  er et  $n$ -te gradspolynomium. Hvis  $a_0 \neq 0$  findes der et polynomium af grad  $n$  som er en partikulær løsning til differentiaalligningen. Generelt findes der et polynomium af grad højst  $n + 2$  som er en partikulær løsning til differentiaalligningen. Man finder partikulære løsninger på de nævnte former ved at indsætte polynomier af passende grad med ubekendte koefficienter i differentiaalligningens venstreside og afstemme med  $q$ , jf. identitetssætningen for polynomier, eNote 2, sætning 2.15.

Årsagen til at man må prøve med et polynomium, som er 2 grader højere end højresidens polynomium er, at 2. ordens differentiaalligningens venstre side kan resultere i et polynomium, som er op til 2 grader lavere. Hvis  $a_0 = 0$ , så bliver resultatet 1 grad lavere. Hvis både  $a_0 = 0$  og  $a_1 = 0$ , så bliver resultatet 2 grader lavere.

Brugeren skal indtaste de 2 næste linjer (markeret med **rødt**), nemlig venstre side af differentiaalligningen ( $f(X)$ ) og højre side af differentiaalligningen ( $HS$ ).

restart

### Indtast (afhænger af opgaveteksten)

**Indskriv venstre side af differentiaalligningen (som en funktion):**

$$f(X) := \text{diff}(X, t, t) + 3 \cdot \text{diff}(X, t) - 4 \cdot X:$$

**Højre siden (den inhomogene del) indskrives, så kører resten automatisk:**

$$HS := 29 - 12 \cdot t:$$

### Her kører den generelle algoritme

Graden af højre siden +2:

$$n := \text{degree}(HS) + 2 = 3$$

Generel polynomium af grad 2 højere end højresiden opbygges:

$$G\text{Æ}T := 0:$$

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $n$  **do**

$$G\text{Æ}T := G\text{Æ}T + c[i] \cdot t^i:$$

**od:**

$$G\text{Æ}T = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$$

Gættet indsættes i venstre siden og omstruktureres efter potenser af  $t$ :

$$VS := f(G\text{Æ}T) = -4 t^3 c_3 - 4 t^2 c_2 + 9 t^2 c_3 - 4 t c_1 + 6 t c_2 + 6 t c_3 - 4 c_0 + 3 c_1 + 2 c_2$$

$$VS := \text{collect}(VS, t) = -4 c_3 t^3 + (-4 c_2 + 9 c_3) t^2 + (-4 c_1 + 6 c_2 + 6 c_3) t - 4 c_0 + 3 c_1 + 2 c_2$$

Koefficienterne i de 2 polynomier skal være ens. Det giver løsningen på koefficienterne:

$$L := \text{solve}(\{\text{seq}(\text{coeff}(VS, t, i) = \text{coeff}(HS, t, i), i = 0 .. n)\}, \{\text{seq}(c[i], i = 0 .. n)\})$$

$$\{c_0 = -5, c_1 = 3, c_2 = 0, c_3 = 0\}$$

Nu opbygges løsningen, som et er polynomium:

$L\text{ØSN} := 0$  :

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $n$  **do**

$c[i] := \text{rhs}(L[i + 1])$  :

$L\text{ØSN} := L\text{ØSN} + c[i] \cdot t^i$  :

**od**:

En inhomogen partikulær løsning er så:

$$L\text{ØSN} = -5 + 3t$$

Maple tjek:

$$\text{dsolve}(f(x(t)) = HS) = x(t) = e^t \_C2 + e^{-4t} \_C1 - 5 + 3t$$

## Kæmpe eksempel med den generelle algoritme: $29 - 2 \cdot t + t^2 - 2 \cdot t^3 + t^7$

restart

**Indskriv venstre side af differentialligningen (som en funktion):**

$$f(X) := \text{diff}(X, t, t) + 3 \cdot \text{diff}(X, t) - 4 \cdot X :$$

**Højre siden (den inhomogene del) indskrives, så kører resten automatisk:**

$$HS := 29 - 2 \cdot t + t^2 - 2 \cdot t^3 + t^7 :$$

Graden af højre siden er:

$$n := \text{degree}(HS) + 2 = 9$$

Generel polynomium af grad 2 højere end højresiden opbygges:

$G\text{ÆT} := 0$  :

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $n$  **do**

$G\text{ÆT} := G\text{ÆT} + c[i] \cdot t^i$  :

**od**:

$$G\text{ÆT} = c_9 t^9 + c_8 t^8 + c_7 t^7 + c_6 t^6 + c_5 t^5 + c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$$

Gættet indsættes i venstre siden og omstruktureres efter potensen af  $t$ :

$$VS := f(G\text{ÆT}) =$$

$$\begin{aligned} & -4 t^9 c_9 - 4 t^8 c_8 + 27 t^8 c_9 - 4 t^7 c_7 + 24 t^7 c_8 + 72 t^7 c_9 - 4 t^6 c_6 + 21 t^6 c_7 + 56 t^6 c_8 - 4 t^5 c_5 + 18 t^5 c_6 \\ & + 42 t^5 c_7 - 4 t^4 c_4 + 15 t^4 c_5 + 30 t^4 c_6 - 4 t^3 c_3 + 12 t^3 c_4 + 20 t^3 c_5 - 4 t^2 c_2 + 9 t^2 c_3 + 12 t^2 c_4 - 4 t c_1 \\ & + 6 t c_2 + 6 t c_3 - 4 c_0 + 3 c_1 + 2 c_2 \end{aligned}$$

$$VS := \text{collect}(VS, t) =$$

$$\begin{aligned} & -4 c_9 t^9 + (-4 c_8 + 27 c_9) t^8 + (-4 c_7 + 24 c_8 + 72 c_9) t^7 + (-4 c_6 + 21 c_7 + 56 c_8) t^6 + (-4 c_5 + 18 c_6 \\ & + 42 c_7) t^5 + (-4 c_4 + 15 c_5 + 30 c_6) t^4 + (-4 c_3 + 12 c_4 + 20 c_5) t^3 + (-4 c_2 + 9 c_3 + 12 c_4) t^2 + (-4 c_1 \\ & + 6 c_2 + 6 c_3) t - 4 c_0 + 3 c_1 + 2 c_2 \end{aligned}$$

Koefficienterne i de 2 polynomier skal være ens. Det giver løsningen på koefficienterne:

$$L := \text{solve}(\{\text{seq}(\text{coeff}(VS, t, i) = \text{coeff}(HS, t, i), i = 0 .. n)\}, \{\text{seq}(c[i], i = 0 .. n)\})$$

$$\left\{ c_0 = -\frac{4148737}{4096}, c_1 = -\frac{1029631}{1024}, c_2 = -\frac{257537}{512}, c_3 = -\frac{21461}{128}, c_4 = -\frac{5355}{128}, c_5 = -\frac{273}{32}, c_6 = -\frac{21}{16}, c_7 = -\frac{1}{4}, c_8 = 0, c_9 = 0 \right\}$$

Nu opbygges løsningen, som et er polynomium:

$L\text{ØSN} := 0$  :

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $n$  **do**

$c[i] := \text{rhs}(L[i + 1])$  :

$L\text{ØSN} := L\text{ØSN} + c[i] \cdot t^i$  :

**od**:

En inhomogen partikulær løsning er så:

$$LØSN = -\frac{4148737}{4096} - \frac{1029631}{1024} t - \frac{257537}{512} t^2 - \frac{21461}{128} t^3 - \frac{5355}{128} t^4 - \frac{273}{32} t^5 - \frac{21}{16} t^6 - \frac{1}{4} t^7$$

Maple tjek:

`dsolve(f(x(t)) = HS) =`

$$x(t) = e^t \_C2 + e^{-4t} \_C1 - \frac{4148737}{4096} - \frac{1029631}{1024} t - \frac{257537}{512} t^2 - \frac{21461}{128} t^3 - \frac{5355}{128} t^4 - \frac{273}{32} t^5 - \frac{21}{16} t^6 - \frac{t^7}{4}$$

## Eksempel hvor det faktisk er nødvendigt at gå 2 grader over højresiden

*restart*

**Indskriv venstre side af differentialligningen (som en funktion):**

`f(X) := diff(X, t, t) :`

**Højre siden (den inhomogene del) indskrives, så kører resten automatisk:**

`HS := 29 - 2*t + t^2 - 2*t^3 + t^7 :`

Graden af højre siden er:

`n := degree(HS) + 2 = 9`

Generel polynomium af grad 2 højere end højresiden opbygges:

`GÆT := 0 :`

**for i from 0 to n do**

`GÆT := GÆT + c[i]*t^i :`

**od:**

`GÆT = = c_9 t^9 + c_8 t^8 + c_7 t^7 + c_6 t^6 + c_5 t^5 + c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0`

Gættet indsættes i venstre siden og omstruktureres efter potensen af t:

`VS := f(GÆT) = 72 t^7 c_9 + 56 t^6 c_8 + 42 t^5 c_7 + 30 t^4 c_6 + 20 t^3 c_5 + 12 t^2 c_4 + 6 t c_3 + 2 c_2`

`VS := collect(VS, t) = 72 t^7 c_9 + 56 t^6 c_8 + 42 t^5 c_7 + 30 t^4 c_6 + 20 t^3 c_5 + 12 t^2 c_4 + 6 t c_3 + 2 c_2`

Koefficienterne i de 2 polynomier skal være ens. Det giver løsningen på koefficienterne:

`L := solve( {seq(coeff(VS, t, i) = coeff(HS, t, i), i = 0 .. n) }, {seq(c[i], i = 0 .. n) } ) =`

$$\left\{ c_0 = c_0, c_1 = c_1, c_2 = \frac{29}{2}, c_3 = -\frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{12}, c_5 = -\frac{1}{10}, c_6 = 0, c_7 = 0, c_8 = 0, c_9 = \frac{1}{72} \right\}$$

**NB: der sket det her, at den homogene løsning  $c_1 \cdot t + c_0$  faktisk kommer med her.**

Nu opbygges løsningen, som et er polynomium:

`LØSN := 0 :`

**for i from 0 to n do**

`c[i] := rhs(L[i + 1]) :`

`LØSN := LØSN + c[i]*t^i :`

**od:**

En inhomogen partikulær løsning er så:

$$LØSN = c_1 t + c_0 + \frac{29}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{12} t^4 - \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{72} t^9$$

For at få én partikulær løsning må man stryge  $c_1 \cdot t + c_0$  (som jo her er løsningen til den homogene differentialligning)!

Maple tjek:

$$dsolve(f(x(t)) = HS) = x(t) = \frac{1}{72} t^9 - \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{12} t^4 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{29}{2} t^2 + \_C1 t + \_C2$$