Rumintegral (3D-område i 3 dimensioner)

restart
with(*plots*) :
with(*Integrator8*) :
with(*VektorAnalyse3*) = [*div*, *grad*, *kryds*, *prik*, *rot*, *vop*]
with(*plot2D3D*) = [*plot2D*, *plot3D*]

Parameterfremstilling af et 3D-område i rummet (eksempel)

NB: se filen "fladeint.mw" eller "fladeint.pdf" for detaljer om dette 3D-område.

Parameterfremstilling af 3D-området i rummet, hvor $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $v \in [0; 1]$ og $w \in [0; 1]$:

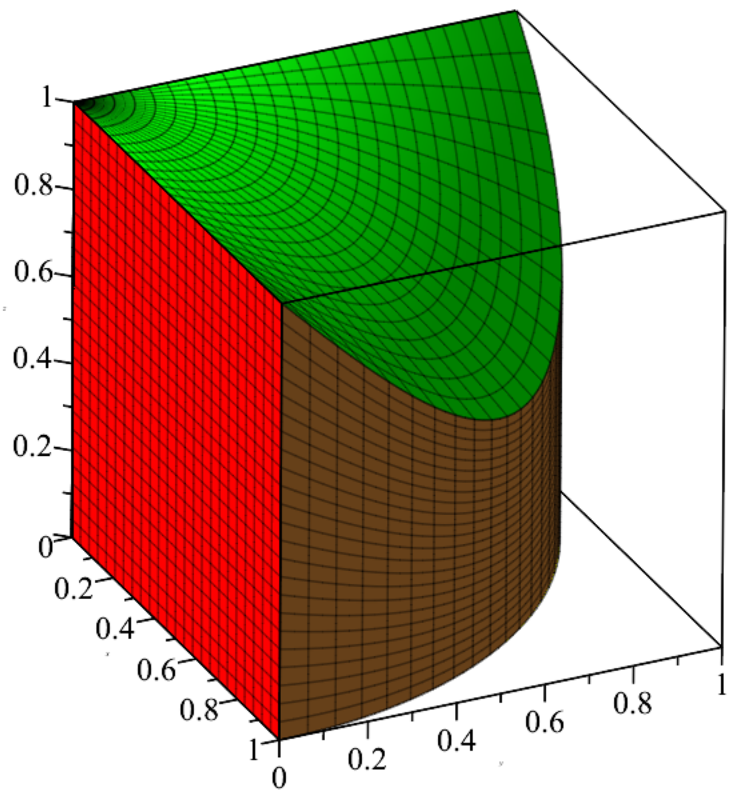
$r(u, v, w) := \langle v\cdot\cos(u), v\cdot\sin(u), w\cdot(1 - v^2\cdot\sin(u)\cdot\cos(u))\rangle$:

$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} v\cos(u) \\ v\sin(u) \\ w\,(1 - v^2\sin(u)\cos(u)) \end{bmatrix}$$

$INT := \left[0, \frac{\pi}{2}, 0, 1, 0, 1\right]$:

Graf over 3D-området i rummet

FARVER := [*red*, *blue*, *gray*, *gold*, *yellow*, *green*] :
display(*plot3D*(*r*(*u*, *v*, *w*), *INT*, *FARVER*), *labels* = [*x*, *y*, *z*], *axes* = *boxed*)



Volumen af 3D-området

Trinvis

Jacobi-matricen med de partielle afledede beregnes:
$J := VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]) =$

$$\begin{bmatrix} -v\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ v\cos(u) & \sin(u) & 0 \\ w\left(-v^2\cos(u)^2 + v^2\sin(u)^2\right) & -2\,w\,v\sin(u)\cos(u) & 1 - v^2\sin(u)\cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som den numeriske værdi af determinanten:
$Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](J)| =$
$\left|\sin(u)^3\cos(u)\,v^3 + \sin(u)\cos(u)^3\,v^3 - v\sin(u)^2 - v\cos(u)^2\right|$
$Jacobi := simplify(\%) = \left|v\left(v^2\sin(u)\cos(u) - 1\right)\right|$
$Jacobi := simplify(\%)$ assuming $v > 0 = v\left|v^2\sin(u)\cos(u) - 1\right|$

Arealet bestemmes så ved et trippelintegral:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot Jacobi\,du\,dv\,dw = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}$$

Med færdig formel

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\left|LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]))\right|\,du\,dv\,dw = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}$$

Med Integrator8-pakken

$INT = \left[0, \frac{\pi}{2}, 0, 1, 0, 1\right]$

$rumIntGo(r, INT, 1) = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}$

$evalf(\%) = 0.6603981635$

Konklusion: rumfanget af 3D-området er ca. 0.66

Masse af 3D-området

Hvis man antager, at fladen har en **massetæthed** (masse pr. rumfangsenhed) kaldet f, så kan man beregne 3D-områdets samlede masse.

I dette eksempel afhænger massetætheden alene af z:
$f(x, y, z) := z$:

Trinvis

Jacobi-matricen med de partielle afledede beregnes:
$J := VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]) =$

$$\begin{bmatrix} -v\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ v\cos(u) & \sin(u) & 0 \\ w\left(-v^2\cos(u)^2 + v^2\sin(u)^2\right) & -2\,w\,v\sin(u)\cos(u) & 1 - v^2\sin(u)\cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som dern numeriske værdi af determinanten:
$Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](J)| =$

$\left|\sin(u)^3 \cos(u)\, v^3 + \sin(u) \cos(u)^3 v^3 - v \sin(u)^2 - v \cos(u)^2\right|$

$Jacobi := simplify(\%) = \left|v \left(v^2 \sin(u) \cos(u) - 1\right)\right|$

$Jacobi := simplify(\%)$ assuming $v > 0 = v \left|v^2 \sin(u) \cos(u) - 1\right|$

Arealet bestemmes så ved et trippelintegral:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(vop(r(u, v, w))) \cdot Jacobi \, du \, dv \, dw = \frac{25\pi}{192} - \frac{1}{8}$$

Med færdig formel

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(vop(r(u, v, w))) \cdot |LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]))| \, du \, dv \, dw$$

$$= \frac{25\pi}{192} - \frac{1}{8}$$

Med Integrator8-pakken

$INT = \left[0, \frac{\pi}{2}, 0, 1, 0, 1\right]$

$rumIntGo(r, INT, f) = \frac{25\pi}{192} - \frac{1}{8}$

$evalf(\%) = 0.2840615434$

Konklusion: 3D-områdets masse er ca. 0.28

NB: Beregningerne af massen tager lang tid - især "rumIntGo" fra Integrator8-pakken. Hav tålmodighed!