En funktion, hvor Taylor-polynomiet kun passer på et vist område

I dette eksemple ser man, at **konvergens-radius** r for Taylor-polynomiet kan være endelig.

Det betyder, at uanset, hvor mange grader man tager med i Taylor-polynomiet, så passer den kun i intervallet $]x_0 - r; x_0 + r[$

Test påstanden ved at prøve med forskellige værdier af udviklingspunktet x_0 og graden n.

> $restart$

> $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f := x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

> $x_0 := 0$

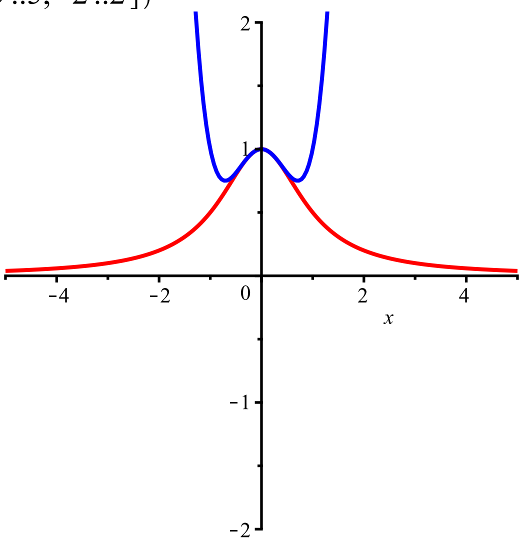
$$x_0 := 0 \quad (2)$$

> $n := 5$

$$n := 5 \quad (3)$$

> $g(x) := mtaylor\left(f(x), x = x_0, n\right) :$

> $with(plots) :$
> $plot1 := plot(f(x), x = -5 ..5, color = red) :$
> $plot2 := plot(g(x), x = -5 ..5, color = blue) :$
> $display(plot1, plot2, view = [-5 ..5, -2 ..2])$



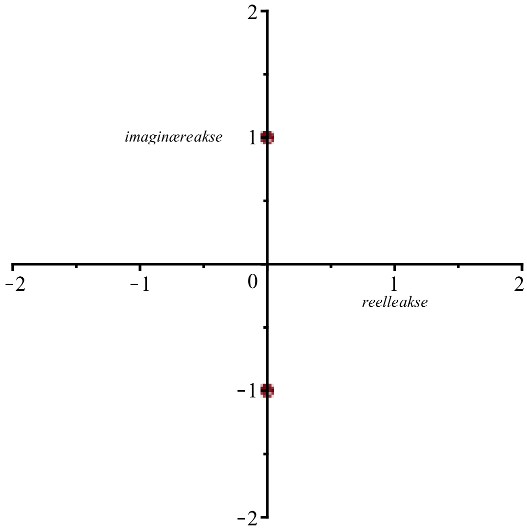
Forklaring

Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ er veldefineret for alle $x \in \mathbb{R}$,
Men funktionen har indenfor de komplekse tal faktisk 2 nulpunkter i nævneren:

> $solve\left(1 + x^2 = 0\right)$

$$I, -I \quad (1.1)$$

> $complexplot([\%], view = [-2 ..2, -2 ..2], style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, labels = [reelle\ akse, imaginære\ akse])$



Nævneren i funktionen $f(x)$ har altså 2 komplekse rødder: I og $-I$.
Vi antager, at x_0 ligger på den reelle akse.
Og finder så afstanden mellem x_0 og de 2 rødder:

> $Konvergensradius1 := \mathrm{abs}(x_0 - I)$

$$Konvergensradius1 := 1 \tag{1.2}$$

> $Konvergensradius2 := \mathrm{abs}(x_0 + I)$

$$Konvergensradius2 := 1 \tag{1.3}$$

> $Konvergensradius3 := \sqrt{x_0^2 + 1}$

$$Konvergensradius3 := 1 \tag{1.4}$$

Her gælder, at hvis udviklingspunktet hedder x_0, så er konvergensradius $r = \sqrt{x_0^2 + 1}$
Det er jo faktisk bare Pythagoras' sætning!

Passer det men dine forsøg ovenfor?