

# Differentiabilitet af vektorfunktion

Man kan ikke se på 2D-banekurve for en vektorfunktion  $f(t)=(x(t),y(t))$  om den er differentiablel.

**NB:** Man skal undersøge om hver af koordinatfunktionerne  $x(t)$  og  $y(t)$  er differentiablel.

## Eksempel på en differentiablel vektorfunktion af 2 variable

> restart

> with(plots) :

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ t^2 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

>  $x := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, t^2, t \leq 0, 0) : x'(t) = x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

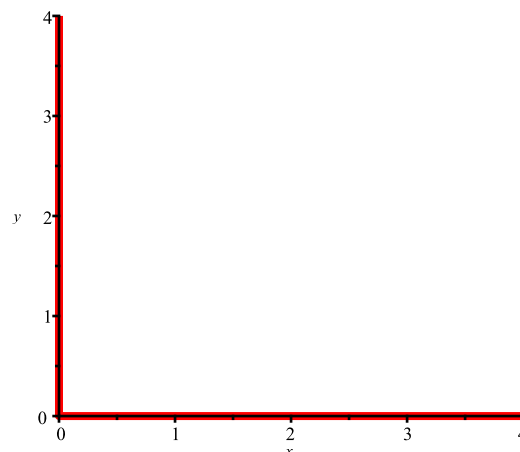
>  $y := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, 0, t \leq 0, t^2) : y'(t) = y(t)$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \\ t^2 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

**Banekurven i planen knækker 90° i (0,0):**

**NB:** Her er kun 2 kordinater: x og y.

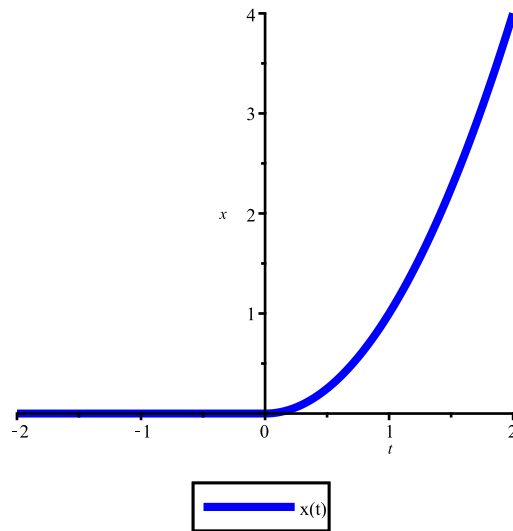
>  $\text{plot}([x(t), y(t), t=-2..2], \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 3, \text{labels} = [x, y], \text{legend} = ["\text{banekurven i planen}"])$



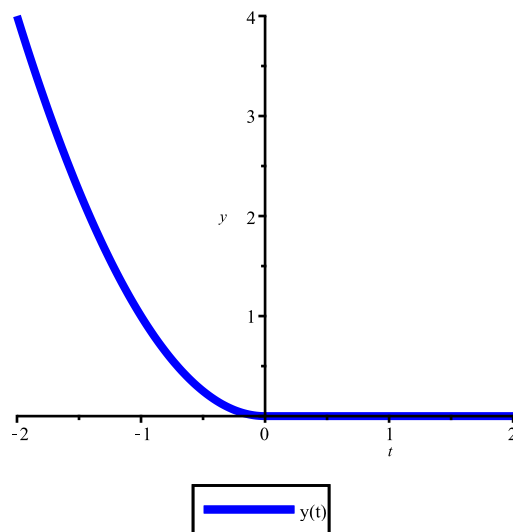
— banekurven i planen

**Men** funktionen  $f(t)=(x(t),y(t))$  er en differentiablel funktion, da **koordinatfunktionerne**  $x(t)$  og  $y(t)$  er differentiablel:

>  $\text{plot}(x(t), t=-2..2, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3, \text{labels} = [t, x], \text{legend} = ["x(t)"])$



> `plot(y(t), t=-2..2, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"])`



Koordinatfunktionernes afledede  $x'(t)$  og  $y'(t)$  er **kontinuerede** funktioner af  $t$ :

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ 2t & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

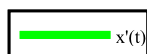
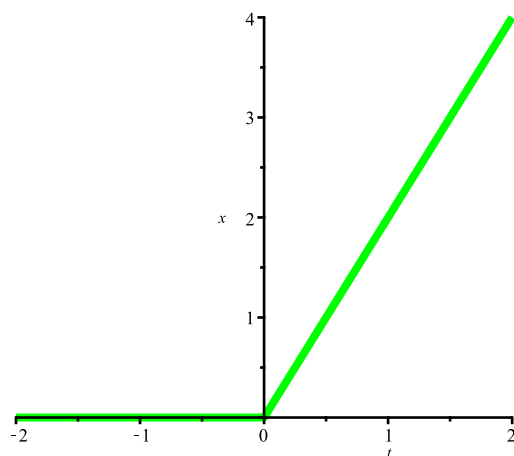
>  $x'(t)$

$$\begin{cases} 2t & 0 < t \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

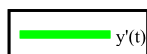
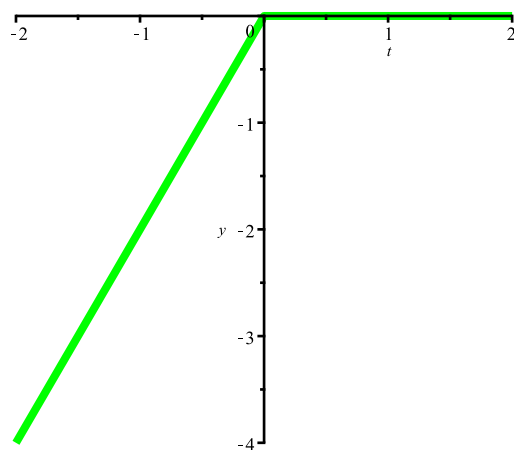
>  $y'(t)$

$$\begin{cases} 0 & 0 < t \\ 2t & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

> `plot(x'(t), t=-2..2, color=green, thickness=3, legend=["x'(t)"], labels=[t, x])`



> `plot(y'(t), t=-2..2, color = green, thickness = 3, legend = ["y'(t)"], labels = [t, y])`



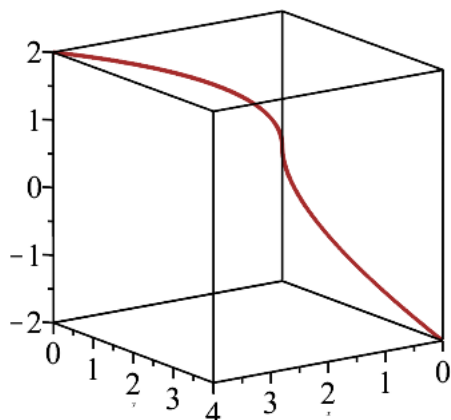
**Banekurven i rummet er differentiabel:**

**NB:** Her er 3 kordinater: t, x og y.

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. Grafen er simpelthen glat - også i  $t=0$ .)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t-aksen går ud af skærmen samt x-aksen til højre og y-aksen opad. Så fremkommer banekurven i x-y-planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness = 3, color = brown, axes = BOXED, labels = [x, y, t])`  
 $t=0$ .



▼ **Eksempel på en ikke-differentiabel vektorfunktion af 2 variable**

> restart

> with(plots) :

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

> x := t → piecewise(t < 0, 1/2 · t, t ≥ 0, 2 · t) : 'x(t)' = x(t)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \end{cases} \quad (2.1)$$

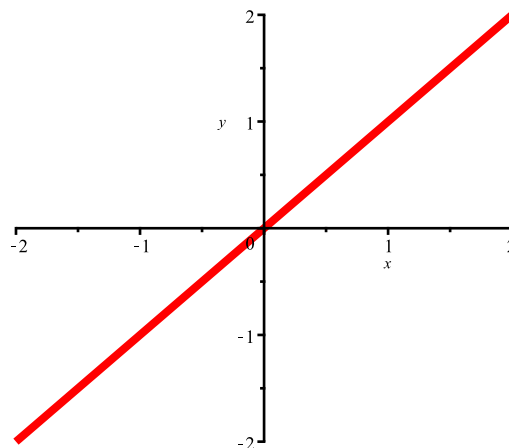
> y := t → piecewise(t < 0, 1/2 · t, t ≥ 0, 2 · t) : 'y(t)' = y(t)

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \end{cases} \quad (2.2)$$

**Banekurven i planen** er en ret linje:

**NB:** Her er kun 2 kordinater: x og y.

> plot([x(t), y(t), t = -4 .. 1], color = red, thickness = 3, labels = [x, y], legend = ["banekurven i planen"])

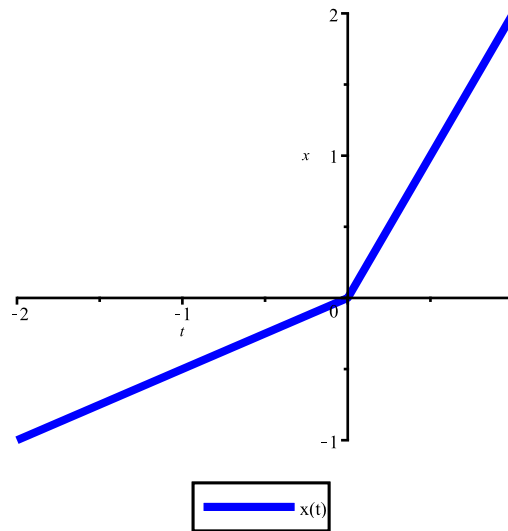


— banekurven i planen

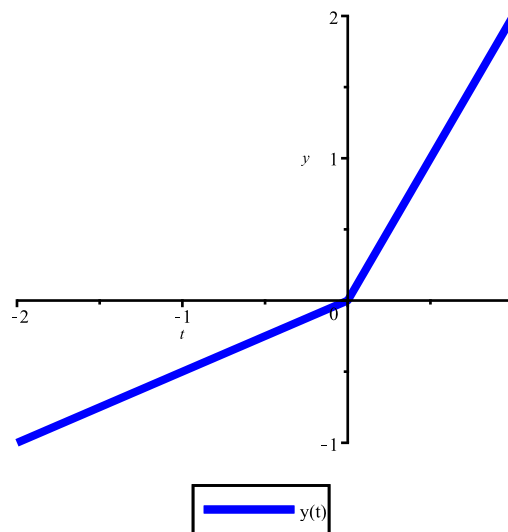
Men **koordinatfunktionerne** x(t) og y(t) er **ikke differentiable**:

(grafen knækker i 0)

> plot(x(t), t = -2 .. 1, color = blue, thickness = 3, labels = [t, x], legend = ["x(t)"])



> `plot(y(t), t=-2..1, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"])`



**Banekurven i rummet er ikke-differentiabel:**

**NB: Her er 3 kordinater: t, x og y.**

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. Grafen knækker i  $t = 0$ .)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t-aksen går ud af skærmen samt x-aksen til højre og y-aksen opad. Så fremkommer banekurven i x-y-planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness=3, color=brown, axes=BOXED, labels=[x, y, t])`

