Regning med vektorer og matricer i Maple

Overalt i denne beskrivelse anvendes Maple-pakken *LinearAlgebra*.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

Vektorer

Definition af vektor

Direkte med < og > samt ,:

$$u := \langle -2, 3, -4 \rangle = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

eller:
Med skabelon fra "Matrix-paletten".
NB: Der skal stå "Insert Vector[column]" for neden!

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nulvektor

Vektor med lutter 0'er:

$$ZeroVector(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Længde af vektor

$$u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$Norm(u, 2) = \sqrt{29}$

NB: Vigtigt, at parameteren 2 skrives.

Hvis 2 udelades, så bliver resultatet den numerisk største koordinat (svarende til ∞ normen)!
$Norm(u) = 4$
$Norm(u, \infty) = 4$

Enhedsvektor ud fra vektor

$Normalize(u, 2) =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{4\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix}$$

eller:

$$\frac{u}{Norm(u, 2)} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{4\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix}$$

Vinkel mellem 2 vektorer

$$VectorAngle(u, v) = \arccos\left(\frac{4\sqrt{29}\sqrt{6}}{87}\right)$$

$$evalf(\%) = 0.9191723423$$

eller:

$$\arccos\left(\frac{u \cdot v}{Norm(u, 2) \cdot Norm(v, 2)}\right) = \arccos\left(\frac{4\sqrt{29}\sqrt{6}}{87}\right)$$

$$evalf(\%) = \quad = 0.9191723423$$

$$\frac{\%}{\pi} \cdot 180 = 52.66469585$$

Dvs. vinklen er ca. $\underline{\underline{0.919\ radianer \approx 52.7°}}$

Krydsprodukt i $\mathbb{R}^3$

$$u \times v = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

eller:

$with(VektorAnalyse3):$

$$kryds(u, v) = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Konvertering fra vektor til søjlematrix

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$type(v, Vector) = true$

$w := convert(v, Matrix) =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$type(w, Matrix) = true$

NB: *v* og *w* ser ens ud, men fungerer ikke ens!

Matricer

Definition af matrix

Direkte med < og > samt , ; og | :

$$M := \langle 1, 2, 3; 4, 5, 6 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M2 := \langle 1, 2, 3 | 4, 5, 6 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Med skabelon fra "Matrix-paletten".

NB: der skal stå "Insert Matrix" for neden!

$$N := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Konvertering af matrix til vektor

Konvertering af matrix til vektor (**taget søjlevis**):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$convert(M, Vector) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Visning af en stor matrix

Umiddelbart viser Maple kun indholdet i en matrix på max. 10 x 10.

$IdentityMatrix(13) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

13 × 13 Matrix

Med denne kommando kan man øge størrelsen til f.eks. 13 x 13:
$interface(rtablesize = 13):$

$$IdentityMatrix(13) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enhedsmatrix

Enhedsmatrix af størrelse 4 x 4:

$$IdentityMatrix(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

Diagonalmatrix med 7, 9, 13 og 0 i diagonalen:

$DiagonalMatrix([7, 9, 13, 0]) =$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nulmatrix

Kvadratisk matrix med lutter 0'er:

$$ZeroMatrix(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Udtræk af delmatrix

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Udtræk af række 1 til 2, søjle 2 til 3:

$$N[1..2, 2..3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Sammensætning af matrix ud fra delmatricer

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\langle M, N \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\langle M, \langle 7|8\ |9\rangle \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\langle \langle M, \langle 7|8|9\rangle \rangle | N \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Transponeret matrix

$M =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M^{\%T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Bemærk, at "opløftning" i *%T* minder utrolig meget om "opløftning" i *T*, som anvendes i matematik.

Invers matrix

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

NB: Undlad at anvende *MatrixInverse*, da den også giver et svar, når matricen ikke er kvadratisk!

Egenværdier

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$Eigenvalues(N, output = list) = [2, 3, 3]$

Rækkefølgen af de egenværdierne varierer, når man kører filen!

Egenværdierne i listen kan sorteres, så de står i stigende rækkefølge.

NB: <u>Det giver kun mening, når alle egenværdier er reelle</u>, da der ikke findes nogen ordningsrelation indenfor $\mathbb{C}$!!

$sort(\%) = [2, 3, 3]$

Samlet praktisk udtryk, hvis man skal programmere noget:

$sort(Eigenvalues(N, output = list), (x, y) \rightarrow evalf(x) < evalf(y)) = [2, 3, 3]$

NB: *evalf* er nødvendigt, hvis tallene ikke kun er naturlige tal, altså hvis der optræder negative tal eller rødder!

Stort eksempel

$$R := \begin{bmatrix} 611 & 196 & -192 & 407 & -8 & -52 & -49 & 29 \\ 196 & 899 & 113 & -192 & -71 & -43 & -8 & -44 \\ -192 & 113 & 899 & 196 & 61 & 49 & 8 & 52 \\ 407 & -192 & 196 & 611 & 8 & 44 & 59 & -23 \\ -8 & -71 & 61 & 8 & 411 & -599 & 208 & 208 \\ -52 & -43 & 49 & 44 & -599 & 411 & 208 & 208 \\ -49 & -8 & 8 & 59 & 208 & 208 & 99 & -911 \\ 29 & -44 & 52 & -23 & 208 & 208 & -911 & 99 \end{bmatrix} :$$

$EV := Eigenvalues(R, output = list) =$
$[0, 1020, 510 - 100\sqrt{26}, 510 + 100\sqrt{26}, 10\sqrt{10405}, -10\sqrt{10405}, 1000, 1000]$
$sort(EV) = [0, 1000, 1000, 1020, -10\sqrt{10405}, 10\sqrt{10405}, 510 - 100\sqrt{26}, 510 + 100\sqrt{26}]$
Alm. sortering ser bort fra fortegnet!

Korrekt sortering:
$sort(EV, (x, y) \rightarrow evalf(x) < evalf(y)) =$
$[-10\sqrt{10405}, 0, 510 - 100\sqrt{26}, 1000, 1000, 510 + 100\sqrt{26}, 1020, 10\sqrt{10405}]$

Egenvektorer

$$Eigenvectors(N, output = list) = \left[\left[2, 1, \left\{\left[\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[3, 2, \left\{\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\right\}\right]\right]$$

NB: Svaret består af liste med diverse elementer.
Første tal er egenværdien, andet tal er algebraiske multiplicitet af egenværdien, 3. del er egenvektorer for egenværdien. Antal vektorer er geometrisk multiplicitet.

Tolkning

Eksempel på output:

$$\left[\left[2, 1, \left\{\left[\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[3, 2, \left\{\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\right\}\right]\right]$$

rød = egenværdi

grøn = algebraisk multiplicitet

lilla = egenvektorer (og antal egenvektorer = geometrisk multiplicitet)

Tolkning af eksemplet:
Svaret er her en liste med 2 elementer. Hvert element er selv en liste! Osv.

Her er der altså to egenværdier, nemlig **2** og **3**.
De algebraiske multipliciteter er: $am(2) = 1$ og $am(3) = 2$.
De geometriske multipliciteter er: $gm(2) = 1$ og $gm(3) = 2$, nemlig antal basisvektorer for egenvektorrummene.
Egenvektorrummene er: $E_2 = span\{(-1, 1, 0)\}$ og $E_3 = span\left\{\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right\}$.

NB: *Rækkefølgen* af de egenværdierne varierer, når man kører kommandoen!

Sortering

Ønsker man outputtet sorteret efter egenværdiernes størrelse .
NB: Det giver kun mening, når alle egenværdier er reelle, da der ikke findes nogen ordningsrelation indenfor $\mathbb{C}$!!

$$sort(\%, (x, y) \rightarrow evalf(x[1]) < evalf(y[1])) = \left[\left[2, 1, \left\{\left[\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[3, 2, \left\{\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\right\}\right]\right]$$

Samlet praktisk udtryk, hvis man skal programmere noget:

$$sort(Eigenvectors(N, output = list), (x, y) \rightarrow evalf(x[1]) < evalf(y[1])) =$$

$$\left[\left[2, 1, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[3, 2, \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Stort eksempel

$$Q := DiagonalMatrix([1, -2, \sqrt{3}, -4, 5]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Eigenvectors(Q, output = list) =$$

$$\left[\left[1, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-2, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[\sqrt{3}, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[5, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-4, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

$$sort(Eigenvectors(Q, output = list), (x, y) \rightarrow evalf(x[1]) < evalf(y[1])) =$$

$$\left[\left[-4, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-2, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[1, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[\sqrt{3}, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[5, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Gram-Schmidt ortonormaliseringsmetode

Givet et sæt af vektorer, som skal **ortonormaliseres**:

$v_1 := \langle 1, 0, 1 \rangle : v_2 := \langle 0, -1, 1 \rangle : v_3 := \langle 0, 2, 1 \rangle :$

$$GramSchmidt([v_1, v_2, v_3], normalized) = \left[\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\right]$$

Indlægges i en **ortogonal** Q-matrix:

$$Q := Matrix(\%) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$IsOrthogonal(Q) = true$$

Anvendelse i lineære ligningssystemer

Et inhomogent ligningssystem

Givet et ligningssystem:

$x_1 - x_3 + x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = 5$

Koefficientmatrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Højre side:

$$b := \langle 0, 1, 5 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Totalmatrix:

$$T := \langle A | b \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Løsning med Gauss-Jordan elimination

Kan løses et trin ad gangen med *RowOperation*.
Her udføres rækkeoperationerne i ét hug:

$$ReducedRowEchelonForm(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Der er 3 initial-ettaller, og 1 fri parameter.
Vælger $x_3 = t$. Så kan resten af variablene bestemmes:

$x_1 = 1 + t$, $x_2 = 1 - 2 \cdot t$, $x_4 = -1$

Dvs. løsningen er: $\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, -1) + t \cdot (1, -2, 1, 0)}}$, hvor $t \in \mathbb{R}$

Løsning med LinearSolve

Pas på: enten *A*, *b* eller *T* som parametre i parantesen!
Men <u>IKKE</u> *A* (i det tilfælde vil Maple opfatte *A* som en totalmatrix, dvs. sidste søjle i *A* opfattes som højresiden).

$$LinearSolve(A, b) = \begin{bmatrix} \_t_3 + 1 \\ -2\,\_t_3 + 1 \\ \_t_3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$LinearSolve(T) = \begin{bmatrix} \_t0_3 + 1 \\ -2\,\_t0_3 + 1 \\ \_t0_3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen er: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, -1) + t\cdot(1, -2, 1, 0)$, hvor $t \in \mathbb{R}$

Et homogent ligningssystem

Givet et ligningssystem:

$x_1 - x_3 + x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 0$

Koefficientmatrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Højre side:

$$b := \langle 0, 0, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Totalmatrix:

$$T := \langle A|b \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsning med Gauss-Jordan elimination

$$ReducedRowEchelonForm(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Der er 3 initial-ettaller, og 1 fri parameter.
Vælger $x_3 = t$. Så kan resten af variablene bestemmes:

$x_1 = t$, $x_2 = -2\cdot t$, $x_4 = 0$

Dvs. løsningen er: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t\cdot(1, -2, 1, 0)$, hvor $t \in \mathbb{R}$

Løsning med LinearSolve

Pas på: enten A, b eller T som parametre i parantesen!
Men <u>IKKE</u> A (i det tilfælde vil Maple opfatte A som en totalmatrix, dvs. sidste søjle i A opfattes som højresiden).

$$LinearSolve(A, b) = \begin{bmatrix} \_t1_3 \\ -2\,\_t1_3 \\ \_t1_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$LinearSolve(T) = \begin{bmatrix} \_t2_3 \\ -2\,\_t2_3 \\ \_t2_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen er: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t\cdot(1, -2, 1, 0)$, hvor $t \in \mathbb{R}$

Løsning med nulrummet

Superhurtigt - men virker **kun** på et **homogent** ligningssystem.

$$NullSpace(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Dvs. løsningen er: $\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (1, -2, 1, 0)}}$, hvor $t \in \mathbb{R}$

Ortogonalt komplement

Lad et underrum U i $\mathbb{R}^4$ være givet ved 2 ligninger:

$x_1 - x_3 + x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Koefficientmatrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestemmes af U

Underrummet U bestemmes lettest ved:

$$N := NullSpace(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$u_1 := N[1] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 := N[2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{U = span\{(-1, 0, 0, 1), (1, -2, 1, 0)\}}}$

Bestemmelse af $U^{\perp}$

Det ortogonale komplement $U^{\perp}$ bestemmes let ved at konstatere, at det er rækkerne fra A!

Dvs. $\underline{\underline{U^{\perp} = span\{(1, 0, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\}}}$

Koefficientmatricen transponeres:

$$B := A^{\%T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 := B[1..4, 1..1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := B[1..4, 2..2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 := convert(v_1, Vector) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := convert(v_2, Vector) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tjek at $U \perp U^{\perp}$

$with(VektorAnalyse3) = [div, grad, kryds, prik, rot, vop]$

$[prik(u_1, v_1), prik(u_1, v_2), prik(u_2, v_1), prik(u_2, v_2)] = [0, 0, 0, 0]$

Trappematrix og øvre trekantsmatrix

$restart : with(LinearAlgebra) :$

Givet en matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} :$$

Med *ReducedRowEchelonForm* kan man lave en **trappeformet matrix med initial-ettaller:**

$$ReducedRowEchelonForm(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Med *GaussianElimination* kan man lave en **øvre trekantsmatrix**:

$$GaussianElimination(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I visse komplicerede tilfælde må man nøjes med en øvre trekantsmatrix frem for en trappeformet.
De er fordi Maple ikke tjekker om der divideres med 0, når Maple laver rækkeoperationerne i det tilfælde, hvor

der indgår variable/parametre!

Revideret eksempel fra et 3-ugers projekt:

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a & 0 \\ a^2 \cdot \sinh(b) & a^2 \cdot \cosh(b) & -a^2 \cdot \sin(b) & -a^2 \cdot \cos(b) \\ a^3 \cdot \cosh(b) & a^3 \cdot \sinh(b) & -a^3 \cdot \sin(b) & a^3 \cdot \sin(b) \end{bmatrix} :$$

$$ReducedRowEchelonForm(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det viser jo, at rangen af matricen M er 4.

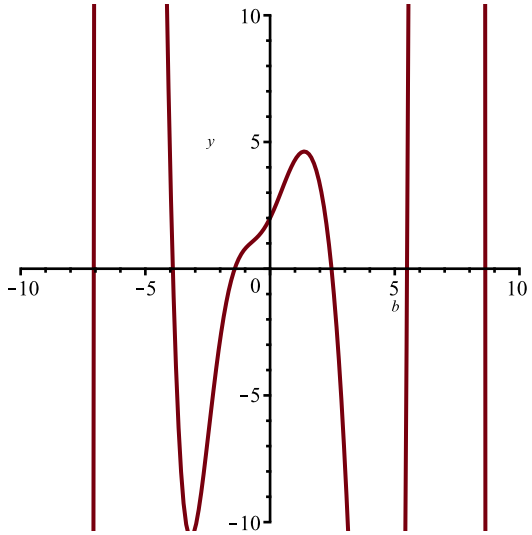
<u>Tjek</u>:
$Rank(M) = 4$
$GaussianElimination(M) =$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 (\sin(b) + \sinh(b)) & -a^2 (\cos(b) + \cosh(b)) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^3 (\cos(b)^2 - \sin(b) \cos(b) - \cosh(b) \cos(b) - \cosh(b) \sin(b) - 2)}{\sin(b) + \sinh(b)} \end{bmatrix}$$

Men der er faktisk 3 diagonal-elementer, som kan gå hen og blive 0!
Så rangen kan i hvert fald i flere tilfælde være 3, hvis parametrene a og b har de rette værdier.

For at undersøge det nærmere man tage parentesen, som står i tælleren af brøken på plads 4,4 i matricen.
Og så tegne en graf, hvor man så ser 6 løsninger mellem -10 og 10!

$$plot(\sin(b) \cos(b) + \cosh(b) \sin(b) - \cos(b)^2 + \cosh(b) \cos(b) + 2, b = -10..10, y = -10..10)$$



Det kan være utrolig svært at finde disse løsninger ved ligningsløsning.
Hvis man vil beregne en tilnærmet værdi mellem 1 og 4, som tydeligvis eksisterer i følge grafen,
så kan man bruge *fsoilve* (den numeriske ligningsløser, hvor man kan angive et interval, hvor løsningen ligger.
NB: *fsolve* giver højest én løsning!

$$fsolve(\sin(b) \cos(b) + \cosh(b) \sin(b) - \cos(b)^2 + \cosh(b) \cos(b) + 2 = 0, b = 1..4) = 2.464404117$$