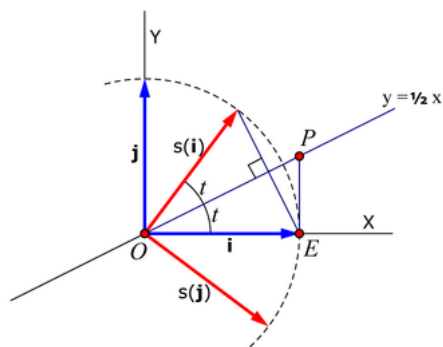


Uge 8, StoreDag, Opgave 6: Spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$

4 beviser!

Metode 1 (brug af trigonometriske formler for dobbelte vinkler)

Bestemmelse af afbildningsmatricen hørende til spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$



(figur 12.11 i eNote 12)

Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Derfor gælder, at $\tan(t) = \frac{1}{2}$

Anvender formler for $\sin(2 \cdot t)$ og $\cos(2 \cdot t)$:

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities#Double-angle.2C_triple-angle.2C_and_half-angle_formulae

Sine	Cosine
$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ $= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$	$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $= 2 \cos^2 \theta - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 \theta$ $= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

$$\text{Dvs. } \cos(2 \cdot t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{og } \sin(2 \cdot t) = \frac{2 \cdot \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Så koordinaterne for } s(\mathbf{i}) = (\cos(2 \cdot t), \sin(2 \cdot t)) = \underline{\underline{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$$

Da $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ vil $s(\mathbf{i}) \perp s(\mathbf{j})$.

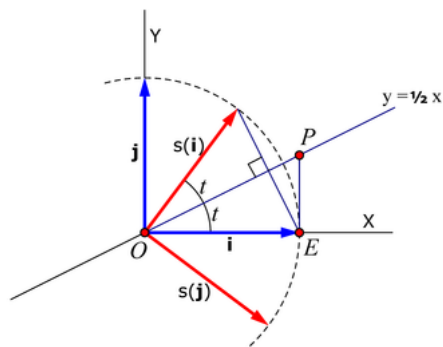
$$\text{Mere præcist er } s(\mathbf{j}) = -\text{tværvektor}(s(\mathbf{i})) = -\text{tværvektor}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}}$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne:

$$\begin{bmatrix} s(\mathbf{i})_x & s(\mathbf{j})_x \\ s(\mathbf{i})_y & s(\mathbf{j})_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}}$$

Metode 2 (brug af drejninger)

Bestemmelse af afbildningsmatricen hørende til spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$



(figur 12.11 i eNote 12)

Anvender rotationsmatricen i \mathbb{R}^2 , dvs. 2 dimensioner.
Lad t have samme betydning som ovenfor.

Afbildningen opbygges af 3 lineære afbildninger:

- 1) Først *drejes* vinklen $-t$ med uret. Nu ligger spejlingsaksen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ på selve x-aksen.
- 2) Så foretages en *spejling* i x-aksen.
- 3) Til sidst *drejes* vinklen t med uret. Dette er den inverse afbildning af nr. 1.

Rotationsmatricer findes let på Wikipedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Spejling i x-aksen: \mathbf{i} går over i sig selv, og \mathbf{j} går over i $-\mathbf{j}$.

Matricerne har så følgende værdi:

> restart

$$> A1 := \begin{bmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix}$$

$$A1 := \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$> A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$> A3 := A1^{-1}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & -\frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

> $A3 := \text{simplify}(A3)$

$$A3 := \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

De 3 lineære afbildninger sættes sammen:

> $A := A3 \cdot A2 \cdot A1$

$$A := \begin{bmatrix} \cos(t)^2 - \sin(t)^2 & 2 \cos(t) \sin(t) \\ 2 \cos(t) \sin(t) & \sin(t)^2 - \cos(t)^2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

> $A := \text{simplify}(A)$

$$A := \begin{bmatrix} 2 \cos(t)^2 - 1 & 2 \cos(t) \sin(t) \\ 2 \cos(t) \sin(t) & -2 \cos(t)^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

NB: I følge formlerne for dobbelte vinkler ovenfor:

Sine	Cosine
$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \end{aligned}$

er denne matrix A identisk med $\begin{bmatrix} \cos(2 \cdot t) & \sin(2 \cdot t) \\ \sin(2 \cdot t) & -\cos(2 \cdot t) \end{bmatrix}$
som jo netop har søjlevektorerne $s(\mathbf{i})$ og $-t\text{værvæktor}(s(\mathbf{i}))$.

Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Derfor gælder, at $\tan(t) = \frac{1}{2}$

Nu indsættes værdien af t :

> $t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$:

Og afbildningsmatricen kan bestemmes:

> A

$$\begin{bmatrix} 2 \cos(t)^2 - 1 & 2 \cos(t) \sin(t) \\ 2 \cos(t) \sin(t) & -2 \cos(t)^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

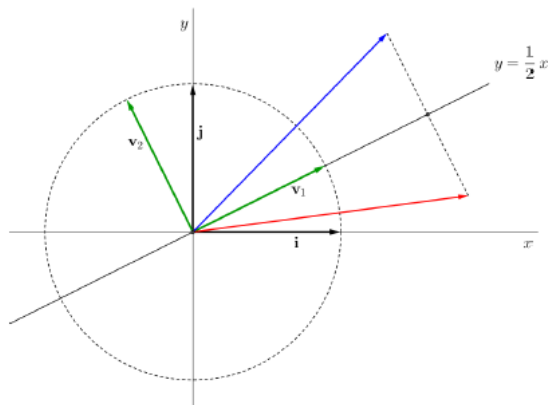
> $\text{simplify}(A)$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Metode 3a (ved brug af basisskifte)



(figur fra opgave 6)

Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Vinklen t hørende til v_1 er givet ved $\tan(t) = \frac{1}{2}$, dvs. $t = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

> restart

> $t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$:

> $v_1 := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

v_2 er givet ved tværvektoren til v_1 .

> $v_2 := \begin{bmatrix} -v_1[2, 1] \\ v_1[1, 1] \end{bmatrix}$

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

eller blot:

> $v_2 := \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$

(3.3)

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Basisskiftmatrix eMv :

$$> eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle$$

$$eMv := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$> vMe := eMv^{-1}$$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Afbildningsmatrix i basis (v_1, v_2) :

$$> vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Afbildningsmatrix i basis (e_1, e_2) :

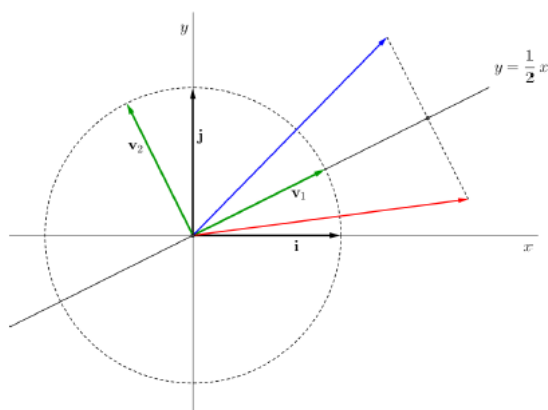
$$> eFe := eMv \cdot vFv \cdot vMe$$

$$eFe := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Metode 3b (ved brug af basisskifte)



(figur fra opgave 6)

Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.Retningen er således givet ved vektoren: $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Enhedsvektoren i samme retningen har så koordinaterne:

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

Dette er faktisk vektor v_1 !

> restart

$$> v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

(4.1)

 v_2 er givet ved tværvektoren til v_1 .

$$> v_2 := \begin{bmatrix} -v_1[2] \\ v_1[1] \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

(4.2)

Basisskiftmatrix eMv :

$$> eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle$$

$$eMv := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

(4.3)

$$> vMe := eMv^{-1}$$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

(4.4)

Afbildningsmatrix i basis (v_1, v_2) :

$$> vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Afbildningsmatrix i basis (e_1, e_2) :

$$> eFe := eMv.vFv.vMe$$

$$eFe := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$