Uge 09, store dag, opgave 8A

Opg 8: *Lineær afbildning på funktionsrum*

Lad U være det underrum af $C^\infty(\mathbb{R})$ som er udspændt af vektorerne $\cos t$, $\sin t$ og e^t .

A Vis, at $\cos t$, $\sin t$ og e^t udgør en basis for U

ANSWER Ligningen $k_1 \cdot \cos t + k_2 \cdot \sin t + k_3 \cdot e^t = 0$ er kun tilfredsstillet for alle t, hvis $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. De tre vektorer $\cos t$, $\sin t$ og e^t er altså lineært uafhængige og da de udspænder U, kan de udgøre en basis for U.

Når vektorrummet består af funktioner, så skal ligningen til at undersøge lineær uafhængighed/afhængighed **gælde for alle $t \in \mathbb{R}$**.
Ved forventning om lineær uafhængighed kan man indsætte en stribe t 'er og så vise, at ligningerne kun er opfyldt for koefficienterne = 0.

Hvordan løses det effektivt?
Opretter udtrykket som en vektor, der er en funktion af t. Opstiller så ligninger, og løser dem straks.
Her prøver man med 3 værdier af t. Man kan ikke nøjes med færre, da der er 3 ubekendte: k_1, k_2 og k_3.
Er man uheldig må man tage flere t'er i brug.

restart
$v(t) := k_1 \cdot \cos(t) + k_2 \cdot sint(t) + k_3 \cdot e^t$:
$solve(\{v(0) = 0, v(1) = 0, v(2) = 0\}) = \{k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0\}$

Dvs. der er kun den trivielle løsning, hvor alle k 'erne er 0.
Derfor udgør de 3 funktioner lineært uafhængigt sæt af vektorer i $C^\infty(\mathbb{R})$.
Hermed vist, at $\cos(t)$, $\sin(t)$ og e^t er en basis for $u = span\{\cos(t), \sin(t), e^t\}$.