Uge 10, SD, opgave 5 - udvidet for bedre forståelse!

Opg 5: *Egenværdier i funktionsrum*

Betragt den lineære afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ givet ved

$$f(x(t)) = x'(t) - x(t)\,.$$

Lad U betegne det underrum i $C^\infty(\mathbb{R})$ som har basis $v = (e^{-t}, 1, e^{t}, e^{2\cdot t})$.

restart
with(*LinearAlgebra*) :

$f(x) := diff(x, t) - x$:

c)

C Vis at billedmængden $f(U)$ er et underrum i U, og bestem afbildningsmatricen ${}_v\mathbf{F}_v$ for afbildningen $f : U \to U$ med hensyn til basis v.

$[f(e^{-t}), f(1), f(e^{t}), f(e^{2\cdot t})] = [-2\,e^{-t}, -1, 0, e^{2\,t}]$
Dvs. billedrummet: $f(U) = span\{e^{-t}, 1, e^{2\cdot t}\}$
Derfor vil $f(U) \subseteq U$.
Og $f(U)$ har dimension 3, mens U har dimension 4.

Afbildningsmatricen:

$$vFv := DiagonalMatrix(\langle -2, -1, 0, 1\rangle) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

D Bestem koordinatvektoren for

$$q(t) = -6e^{-t} + e^{2t} + 2$$

med hensyn til basis v, og find ved hjælp af den i forrige spørgsmål fundne afbildningsmatrix samtlige løsninger i U til ligningen

$$f(x(t)) = q(t)\,.$$

Højresiden $q(t)$ kan udtrykkes i v-basis som:
$q := \langle -6, 2, 0, 1\rangle$:

Differentialligningen kan løses i U :

$$LinearSolve(vFv, q) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ \_t17_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen i U er: $\underline{\underline{\langle 3,-2,0,1\rangle + c\cdot\langle 0,0,1,0\rangle}}$ eller $\underline{\underline{\boldsymbol{x(t) = 3\cdot e^{-t} - 2 + e^{2\cdot t} + c\cdot e^{t}}}}$ hvor $c \in \mathbb{R}$.

Der er altså uendelig mange løsninger.
Altså en partikulær løsning til det inhomogene system + den fuldstændige løsning til det homogen system.

e)

$dsolve\left(x'(t) - x(t) = -6\cdot e^{-t} + e^{2\cdot t} + 2\right) = x(t) = 3\,e^{-t} - 2 + e^{2t} + e^{t}\,\_C1$
Samme løsning som i d).

Det giver samme løsning i c) og d) , da den partikulære løsning samt den homogene løsning alle $\in U$!

EXTRA 1

Antag nu, at basen $e^{t} \notin U$. Dvs. $U = span\{e^{-t}, 1, e^{2\cdot t}\}$.

c)

Afbildningsmatricen bliver så (idet 3. søjle fjernes):

$$vFv1 := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

d)

$$LinearSolve(vFv1, q) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen i U er: $\underline{\underline{\langle 3,-2,1\rangle}}$ eller $\underline{\underline{\boldsymbol{x(t) = 3\cdot e^{-t} - 2 + e^{2\cdot t}}}}$

Der er altså kun én løsning i U.

e)

Maples dsolve giver naturligvis samme løsning som før.

Nu giver c) og d) <u>ikke</u> samme løsning!

EXTRA 2

Antag igen, at $U = span\{e^{-t}, 1, e^{t}, e^{2\cdot t}\}$.
Antag også, at højresiden nu hedder e^{t}.
$q2 := \langle 0, 0, 1, 0\rangle$:

c)

$LinearSolve(vFv, q2)$
Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

Dvs. der er ingen løsning nu, fordi $e^{t} \notin f(U)$!

d)

$dsolve\left(x'(t) - x(t) = e^{t}\right) = x(t) = (t + \_C1)\,e^{t}$

Dvs. løsningen i $C^{\infty}(\mathbb{R})$ er

$$\underline{\underline{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{c}) \cdot \mathbf{e}^{\boldsymbol{t}}}} \text{ hvor } c \in R.$$

Nu giver c) og d) <u>ikke</u> samme løsning!