Effektiv Maple løsning af differentialligningssystem (eNote 17)

Tilfældet med 2 komplekst konjugerede egenværdier

Opgave 1B, uge 12, StoreDag

B

Givet differentialligningssystemet

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Find systemmatricens egenværdier og tilhørende egenrum, og opstil ved hjælp heraf den fuldstændige komplekse løsning på differentialligningssystemet.
2. Opstil nu den fuldstændige reelle løsning på differentialligningssystemet.
3. Vi skal nu finde den løsning på differentialligningssystemet som opfylder $x_1(0) = 0$ og $x_2(0) = 3$. Overvej følgende: Får vi det samme resultat hvis vi finder løsningen ved hjælp af den fuldstændige komplekse løsning som ved hjælp af den fuldstændige reelle løsning?

ANSWER

Egenrummene er E_i =span$\{(2+i, 1)\}$ og E_{-i} =span$\{(2-i, 1)\}$. Alle multipliciteter er 1.
Den fuldstændige reelle løsning:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

Den betingede løsning:

$$x_1(t) = -15\sin(t) \ \text{ og } \ x_2(t) = 3\cos(t) - 6\sin(t)\,.$$

Her vises, hvordan opgaven kan løses effektivt med Maple (ikke håndregning).

eNote 17 er fin, når man håndregner - men anvender man Maple kan man gøre det meget smartere.

$restart : with(LinearAlgebra) :$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} :$$

Fuldstændig kompleks løsning

$$Eigen := Eigenvectors(A, output = list) = \left[\left[I, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 2+I \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[-I, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 2-I \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

$$\lambda := Eigen[1, 1] = I$$

$$v := Eigen[1, 3, 1] = \begin{bmatrix} 2+I \\ 1 \end{bmatrix}$$

NB: egenværdier og egenvektorer er komplekst konjugerede!

$$x_{\mathbb{C}}(t) := c_1 \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot v + c_2 \cdot e^{\overline{\lambda} \cdot t} \cdot \overline{v} :$$

Fuldstændig kompleks løsning:

$$x_{\mathbb{C}}(t) = \begin{bmatrix} (2+I)\, c_1 e^{It} + (2-I)\, c_2 e^{-It} \\ c_1 e^{It} + c_2 e^{-It} \end{bmatrix}$$

hvor konstanterne $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Fuldstændig reel løsning

Metode 17.4 og 17.5:

$x_{\mathbb{R}}(t) := c_3 \cdot \mathrm{Re}\left(e^{\lambda \cdot t} \cdot v\right) + c_4 \cdot \mathrm{Im}\left(e^{\lambda \cdot t} \cdot v\right) :$

$$x_{\mathbb{R}}(t) = \begin{bmatrix} c_3 \, \Re\left((2+\mathrm{I})\, e^{\mathrm{I}\,t}\right) + c_4 \, \Im\left((2+\mathrm{I})\, e^{\mathrm{I}\,t}\right) \\ c_3 \, \Re\left(e^{\mathrm{I}\,t}\right) + c_4 \, \Im\left(e^{\mathrm{I}\,t}\right) \end{bmatrix}$$

$$evalc\left(x_{\mathbb{R}}(t)\right) = \begin{bmatrix} c_3 \left(2\cos(t) - \sin(t)\right) + c_4 \left(\cos(t) + 2\sin(t)\right) \\ c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) \end{bmatrix}$$

NB: for at anvende udtrykket senere til at finde den betingede løsning, er det vigtigt, at man fortæller Maple, at *t* er et reelt tal.
Først da kan Maple bestemme realdel og imaginærdel!

$assume(t, real) : interface(showassumed = 0) :$

Fuldstændig reel løsning:

$$x_{\mathbb{R}}(t) = \begin{bmatrix} c_3 \left(2\cos(t) - \sin(t)\right) + c_4 \left(2\sin(t) + \cos(t)\right) \\ c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) \end{bmatrix}$$

hvor konstanterne $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Betinget <u>reel</u> løsning (ud fra <u>kompleks</u> løsning)

$C := solve\left(\{x_{\mathbb{C}}(0)[1] = 0, x_{\mathbb{C}}(0)[2] = 3\}, \{c_1, c_2\}\right) = \left\{c_1 = \frac{3}{2} + 3\,\mathrm{I},\ c_2 = \frac{3}{2} - 3\,\mathrm{I}\right\}$

$c_1 := rhs(C[1]) = \frac{3}{2} + 3\,\mathrm{I}$

$c_2 := rhs(C[2]) = \frac{3}{2} - 3\,\mathrm{I}$

NB: konstanterne er <u>komplekst konjugerede</u>, derfor bliver løsningen faktisk reel!

$$x_{\mathbb{C}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{15\,\mathrm{I}\, e^{\mathrm{I}\,t}}{2} - \frac{15\,\mathrm{I}\, e^{-\mathrm{I}\,t}}{2} \\ \left(\frac{3}{2} + 3\,\mathrm{I}\right) e^{\mathrm{I}\,t} + \left(\frac{3}{2} - 3\,\mathrm{I}\right) e^{-\mathrm{I}\,t} \end{bmatrix}$$

Det ser komplekst ud, men *evalc* klarer situationen:

$$evalc\left(x_{\mathbb{C}}(t)\right) = \begin{bmatrix} -15\sin(t) \\ 3\cos(t) - 6\sin(t) \end{bmatrix}$$

Betinget <u>reel</u> løsning (ud fra <u>reel</u> løsning)

$R := solve\left(\{x_{\mathbb{R}}(0)[1] = 0, x_{\mathbb{R}}(0)[2] = 3\}, \{c_3, c_4\}\right) = \{c_3 = 3, c_4 = -6\}$

$c_3 := rhs(R[1]) = 3$

$c_4 := rhs(R[2]) = -6$

$$x_{\mathbb{R}}(t) = \begin{bmatrix} -15\sin(t) \\ 3\cos(t) - 6\sin(t) \end{bmatrix}$$

Dvs. man kan bestemme en <u>betinget</u> <u>reel</u> løsning ud fra den fuldstændige <u>relle</u> løsning eller ud fra den fuldstændige <u>komplekse</u> løsning!