Coulomb-feltet

> $restart$

> $with(plots):$

> $with(VektorAnalyse4)$

$$[div, grad, kryds, prik, rot, vop] \quad \mathbf{(1.1)}$$

> $with(plot2D3D2)$

$$[NormalVektorer, TangentVektorer, plot2D, plot3D] \quad \mathbf{(1.2)}$$

> $V := (x, y, z) \rightarrow \dfrac{\langle x, y, z\rangle}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} : 'V(x, y, z)' = V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(1.3)}$$

Cylinder givet ved: $z \in [-h, h]$ og $\rho \in [0, a]$ og $\varphi \in [0, 2\cdot\pi]$

> $assume(a > 0, h > 0); assume(v, real); assume(u, real); interface(showassumed = 0):$

Parametrisering af **den massive cylinder**, hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2\cdot\pi]$ og $w \in [-h, h]$:

> $r := (u, v, w) \rightarrow \langle u\cdot\sin(v), u\cdot\cos(v), w\rangle : 'r(u, v, w)' = r(u, v, w)$

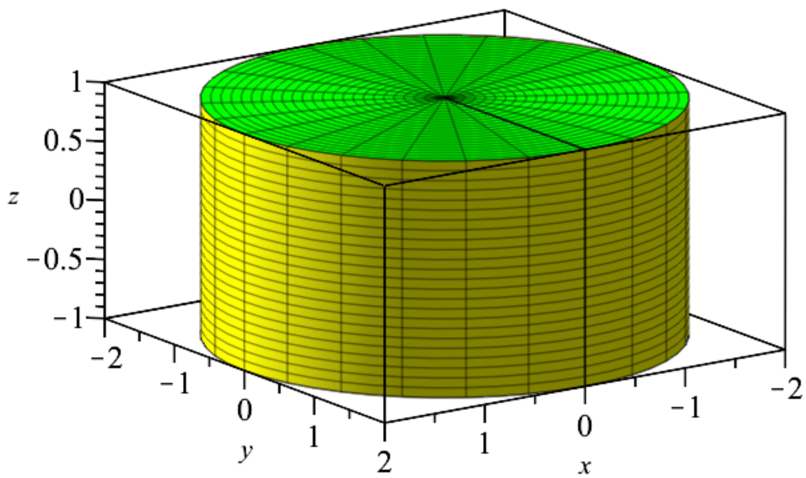
$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ w \end{bmatrix} \quad \mathbf{(1.4)}$$

Vælger $a = 2$ og $h = 1$, så der kan tegnes:

> $INT := [0, 2, 0, 2\cdot\pi, -1, 1]:$

> $FARVER := [red, yellow, gray, gold, blue, green]:$

> $display(plot3D(r(u, v, w), INT, FARVER), labels = [x, y, z], axes = boxed, scaling = constrained)$



a) Divergensen

> $div(V)(x, y, z)$

$$-\frac{3\,x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}+\frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}-\frac{3\,y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}-\frac{3\,z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

> $simplify(\%)$

$$0 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

Dvs. divergensen af V er 0. **Dog *ikke defineret* i origo!**

b) Fluxen

Integralet af divergensen over cylinderen er 0, da divergensen er 0.

MEN. Der er jo en **singularitet** i origo, og da origo ligger inde i cylinderen, så kan **Gauss' sætning IKKE anvendes**!

Forklaring: i Gauss' sætning er det en forudsætning, at vektorfeltet V er glat, dvs. differentiabel overalt. Derfor skal den også være defineret overalt.

Parametrisering af cylinderens **krumme del**, hvor $v \in [0, 2\cdot\pi]$ og $w \in [-h, h]$:

> $r1 := (v, w) \rightarrow \langle a\cdot\cos(v), a\cdot\sin(v), w\rangle$:'$r1(v, w)$'$=r1(v, w)$

(1.2.1)

$$r1(v, w) = \begin{bmatrix} a\cos(v) \\ a\sin(v) \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

> $diff(r1(v, w), v)$

$$\begin{bmatrix} -a\sin(v) \\ a\cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

> $diff(r1(v, w), w)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

> $N := diff(r1(v, w), v) \times diff(r1(v, w), w)$

$$N := \begin{bmatrix} a\cos(v) \\ a\sin(v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

> $Integrand1 := N \cdot V(vop(r1(v, w)))$

$$Integrand1 := \frac{a^2\cos(v)^2}{\left(a^2\cos(v)^2 + a^2\sin(v)^2 + w^2\right)^{3/2}} + \frac{a^2\sin(v)^2}{\left(a^2\cos(v)^2 + a^2\sin(v)^2 + w^2\right)^{3/2}} \quad (1.2.5)$$

> $Flux1 := \int_0^{2\cdot\pi}\left(\int_{-h}^{h} Integrand1 \, dw\right) dv$

$$Flux1 := \frac{4\,h\,\pi}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (1.2.6)$$

Parametrisering af **endeflader** (cirkel), hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2\cdot\pi]$:

> $r2 := (u, v) \rightarrow \langle u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), h\rangle$:'$r2(u, v)$'$= r2(u, v)$; #TOP;
> $r3 := (u, v) \rightarrow \langle u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), -h\rangle$:'$r3(u, v)$'$= r3(u, v)$;#BUND

$$r2(u, v) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ h \end{bmatrix}$$

$$r3(u, v) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ -h \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

Normalvektoren til *r1* skal gå opad, normalevektoren til *r2* skal gå nedad. Så går de begge UD af cylinderen!

> $N2 := simplify(diff(r2(u,v),u) \times diff(r2(u,v),v));$
> $N3 := -simplify(diff(r3(u,v),u) \times diff(r3(u,v),v))$

$$N2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$$N3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{bmatrix} \tag{1.2.8}$$

> $Integrand2 := N2 \cdot V(vop(r2(u,v)));$
> $Integrand3 := N3 \cdot V(vop(r3(u,v)));$

$$Integrand2 := \frac{u\,h}{\left(u^2\cos(v)^2 + u^2\sin(v)^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

$$Integrand3 := \frac{u\,h}{\left(u^2\cos(v)^2 + u^2\sin(v)^2 + h^2\right)^{3/2}} \tag{1.2.9}$$

> $Flux2 := \int_0^a \left(\int_0^{2\cdot\pi} Integrand2\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u;$
> $Flux3 := \int_0^a \left(\int_0^{2\cdot\pi} Integrand3\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$

$$Flux2 := \frac{2\,\pi\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right)}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$Flux3 := \frac{2\,\pi\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right)}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{1.2.10}$$

> $Flux := Flux1 + Flux2 + Flux3$

$$Flux := \frac{4\,h\,\pi}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{4\,\pi\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right)}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{1.2.11}$$

> $simplify(\%)$

$$4\,\pi \tag{1.2.12}$$

Fluxen ud gennem cylinderen er givet ved $\underline{\underline{4\cdot\pi}}$

NB: uafhængig af parametrene *a* og *h* !

Fysikken

Coulombs lov siger, at **kraften** fra en ladning Q på en lille ladning q er: $\vec{F} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot q\cdot Q\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$

hvor $\vec{r}$ er vektoren imellem de 2 ladninger. Placeres Q i origo, er $\vec{r}$ stedvektoren til q.
ε_0 kaldes vacuumpermitiviteten.

Man definerer den **elektriske feltstørrelse** $\vec{E}$ ved: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, altså som kraften pr. ladningsenhed.

Dvs. $\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$

Gauss' sætning giver så, at det ortogonale fladeintegral af $\vec{E}$ over enhver lukket flade, som indeholder ladningen Q $= \int_{flade} \vec{E} \bullet ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

NB: Hvis fladen ikke indeslutter nogen ladning, så bliver svaret 0.

Se formlen blandt **Maxwells ligninger** til beskrivelse af **elektromagnetisme**:
https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations#Formulation_in_SI_units_convention

Lad os teste det med en kugleskal med centrum i origo.
Så er $\vec{E} \perp$ fladen, og $|\vec{E}|$ er konstant.
Derfor bliver fluxen ud gennem kugleskallen

$$= |\vec{E}| \cdot KugleskalAreal = \left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{|\vec{r}|}{r^3} \right) \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

I opgave 5 ovenfor var vektorfeltet $V(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r^3}$, dvs. $V = \frac{\vec{E}}{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot V$

Vi fandt ved udregning, at fluxen af V ud gennem cylinderen er: $4 \cdot \pi$.

Fluxen af $\vec{E}$ ud gennem cylinderen er så: $\left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \right) \cdot (4 \cdot \pi) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, hvilket passer med sætningen!