

Parametrisering af firkanter

Eksempel på parametrisering af en firkant i \mathbb{R}^2

restart

with(plots) :

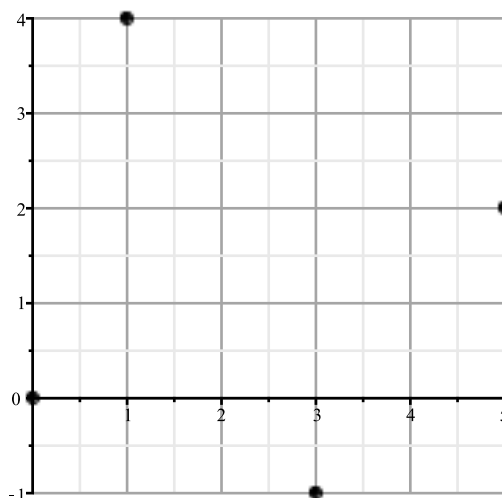
with(plot2D3D2) = [NormalVektorer, TangentVektorer, plot2D, plot3D]

unprotect('D')

Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant $\square ABCD$:

$A := \langle 0, 0 \rangle : B := \langle 3, -1 \rangle : C := \langle 5, 2 \rangle : D := \langle 1, 4 \rangle :$

$P := \text{pointplot}([A, B, C, D], \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{symbolsize} = 20, \text{gridlines})$



Parametriseringen af den rette linje mellem A og B:

$$r_{AB}(u) := \left\langle u, \frac{-1-0}{3-0} \cdot (u-0) + 0 \right\rangle :$$

hvor $u \in [0; 3]$.

$AB := \text{plot}([r_{AB}(u)[1], r_{AB}(u)[2], u = 0..3], \text{color} = \text{red}, \text{gridlines}) :$

$\text{display}(P, AB)$



Parametriseringen af den rette linje mellem D og C:

$$r_{DC}(u) := \left\langle u, \frac{2-4}{5-1} \cdot (u-1) + 4 \right\rangle :$$

hvor $u \in [1; 5]$.

$DC := \text{plot}([r_{DC}(u)[1], r_{DC}(u)[2], u = 1..5], \text{color} = \text{blue}, \text{gridlines}) :$
 $\text{display}(P, DC)$



Nu skal man sørge for, at et løbende punkt på den **røde** linje AB gennemløbes i samme takt som den **blå** linje DC!

Vælger at parameteren u skal være i intervallet $[0; 1]$.

Når $u = 0$ skal man være i A hhv. D.

Når $u = 1$ skal man være i B hhv. C.

Skalerer u for AB-linjen, så den løber mellem 0 og 1:

$$r_{AB2}(u) := r_{AB}((3 - 0) \cdot u + 0) :$$

$$r_{AB2}(u) = \begin{bmatrix} 3u \\ -u \end{bmatrix}$$

$AB2 := \text{plot}([r_{AB2}(u)[1], r_{AB2}(u)[2], u = 0..1], \text{color} = \text{red}, \text{gridlines}) :$
 $\text{display}(P, AB2)$



Skalerer u for DC-linjen så den løber mellem 0 og 1:

$$r_{DC2}(u) := r_{DC}((5 - 1) \cdot u + 1) :$$

$$r_{DC2}(u) = \begin{bmatrix} 4u + 1 \\ -2u + 4 \end{bmatrix}$$

$DC2 := \text{plot}([r_{DC2}(u)[1], r_{DC2}(u)[2], u = 0..1], \text{color} = \text{blue}, \text{gridlines}) :$
 $\text{display}(P, DC2)$



Parameterfremstillingerne af den **røde** og del **blå** linje gennemløber nu AB hhv. DC, når u løber fra 0 til 1!!!!

Forbinder så et punkt på den **røde** linje med punktet på den **blå** linje, som har samme u -værdi:

$$r_{ABtilCD}(u) := r_{DC2}(u) - r_{AB2}(u) :$$

$$r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} u + 1 \\ -u + 4 \end{bmatrix}$$

Denne vektors længde varieres mellem 0 og fuld længde via faktoren v :

$$v \cdot r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} v(u + 1) \\ v(-u + 4) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Få et få et punkt i firkanten skal punktet på AB adderes til vektoren:

$$r_{ABCD}(u, v) := v \cdot r_{ABtilCD}(u) + r_{AB2}(u) :$$

Parametriseringen af firkanten lyder:

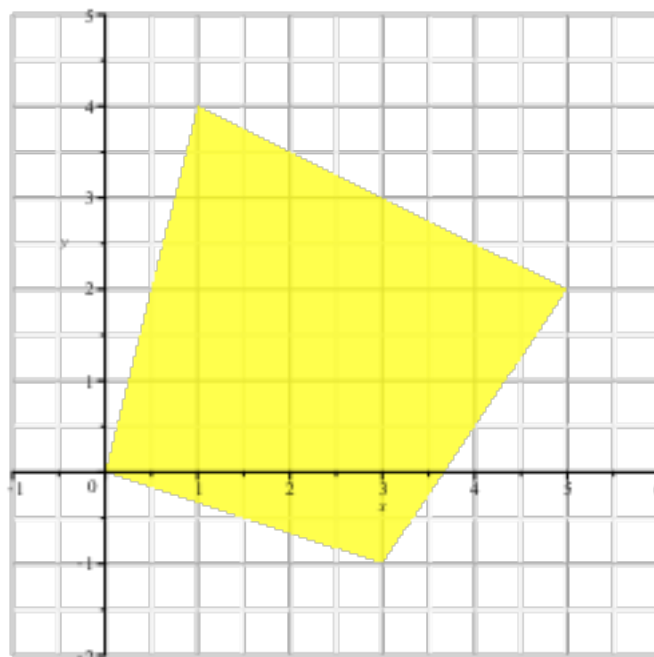
$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v(u + 1) + 3u \\ v(-u + 4) - u \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

▼ Test af parametriseringen

$$INT := [0, 1, 0, 1] :$$

```
display(plot2D(r_{ABCD}(u, v), INT), color = yellow, gridlines, style = surface, transparency = 0.3, view = [-1
..6, -2 ..5], labels = [x, y])
```



Det passer!!!!

Generel parametrisering af en firkant i \mathbb{R}^2

NB: Forudsætning er at firkanten er konveks.

restart

with(plots) :

with(plot2D3D2) = [NormalVektorer, TangentVektorer, plot2D, plot3D]

unprotect('D')

Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant $\square ABCD$:

$$A := \langle a_1, a_2 \rangle : B := \langle b_1, b_2 \rangle : C := \langle c_1, c_2 \rangle : D := \langle d_1, d_2 \rangle :$$

Parametriseringen af den rette linje mellem A og B:

$$r_{AB}(u) := \left\langle u, \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot (u - a_1) + a_2 \right\rangle :$$

u ligger mellem a_1 og b_1 .

Parametriseringen af den rette linje mellem D og C:

$$r_{DC}(u) := \left\langle u, \frac{c_2 - d_2}{c_1 - d_1} \cdot (u - d_1) + d_2 \right\rangle :$$

hvor u ligger mellem d_1 og c_1 .

Nu skal man sørge for, at et løbende punkt på linjen AB gennemløbes i samme takt som linjen DC!

Vælger at parameteren u skal være i intervallet $[0; 1]$.

Når $u = 0$ skal man være i A hhv. D.

Når $u = 1$ skal man være i B hhv. C.

Skalerer u for AB-linjen, så den løber mellem 0 og 1:

$$r_{AB2}(u) := r_{AB}((b_1 - a_1) \cdot u + a_1) :$$

$$r_{AB2}(u) = \begin{bmatrix} (b_1 - a_1)u + a_1 \\ (b_2 - a_2)u + a_2 \end{bmatrix}$$

Skalerer u for DC-linjen så den løber mellem 0 og 1:

$$r_{DC2}(u) := r_{DC}((c_1 - d_1) \cdot u + d_1) :$$

$$r_{DC2}(u) = \begin{bmatrix} (c_1 - d_1)u + d_1 \\ (c_2 - d_2)u + d_2 \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillingerne af den **røde** og del **blå** linje gennemløber nu AB hhv. DC, når u løber fra 0 til 1!!!!

Forbinder så et punkt på den **røde** linje med punktet på den **blå** linje, som har samme u -værdi:

$$r_{ABtilCD}(u) := r_{DC2}(u) - r_{AB2}(u) :$$

$$r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} (c_1 - d_1)u + d_1 - (b_1 - a_1)u - a_1 \\ (c_2 - d_2)u + d_2 - (b_2 - a_2)u - a_2 \end{bmatrix}$$

Denne vektors længde varieres mellem 0 og fuld længde via faktoren v :

$$v \cdot r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} v((c_1 - d_1)u + d_1 - (b_1 - a_1)u - a_1) \\ v((c_2 - d_2)u + d_2 - (b_2 - a_2)u - a_2) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Få et få et punkt i firkanten skal punktet på AB adderes til vektoren:

$$r_{ABCD}(u, v) := v \cdot r_{ABtilCD}(u) + r_{AB2}(u) :$$

Parametriseringen af firkanten lyder:

$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v((c_1 - d_1)u + d_1 - (b_1 - a_1)u - a_1) + (b_1 - a_1)u + a_1 \\ v((c_2 - d_2)u + d_2 - (b_2 - a_2)u - a_2) + (b_2 - a_2)u + a_2 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Test af parametriseringen

Eksempel 1:

Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant $\square ABCD$:

$$A := \langle 0, 0 \rangle : B := \langle 3, -1 \rangle : C := \langle 5, 2 \rangle : D := \langle 1, 4 \rangle :$$

Dvs:

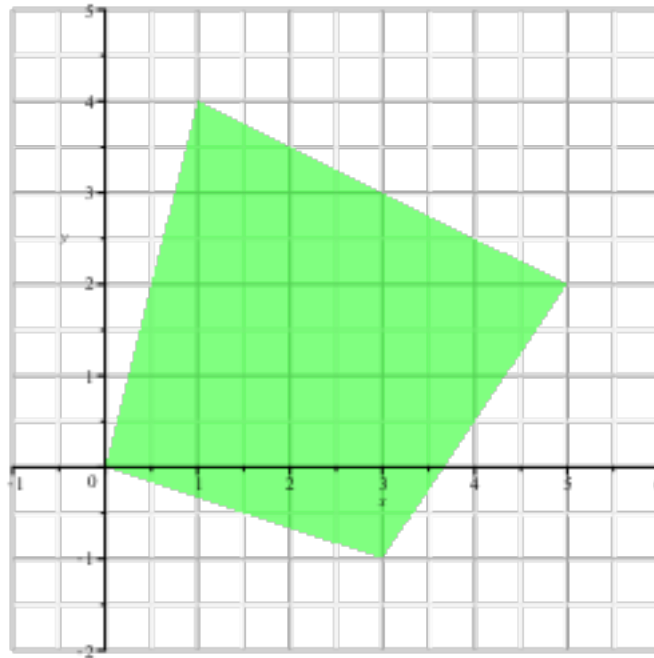
$$a_1 := 0 : a_2 := 0 : b_1 := 3 : b_2 := -1 : c_1 := 5 : c_2 := 2 : d_1 := 1 : d_2 := 4 :$$

$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v(u + 1) + 3u \\ v(-u + 4) - u \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

$$INT := [0, 1, 0, 1] :$$

`display(plot2D(rABCD(u, v), INT), color = green, gridlines, style = surface, transparency = 0.5, view = [-1 ..6, -2 ..5], labels = [x, y])`



Eksempel 2:

Givet 4 andre punkter, som udspænder en firkant $\square ABCD$:

$$A := \langle -1, -1 \rangle : B := \langle 3, -2 \rangle : C := \langle 5, 3 \rangle : D := \langle 0, 2 \rangle :$$

Dvs:

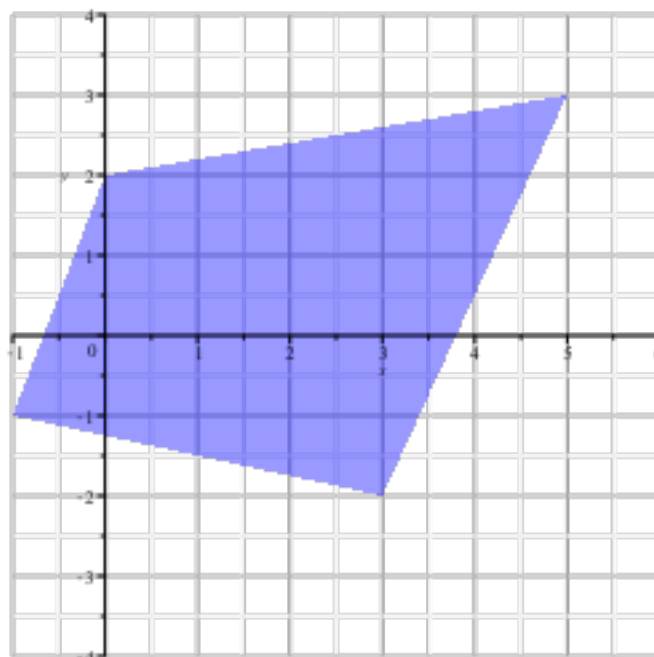
$$a_1 := -1 : a_2 := -1 : b_1 := 3 : b_2 := -2 : c_1 := 5 : c_2 := 3 : d_1 := 0 : d_2 := 2 :$$

$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v(u+1) + 4u - 1 \\ v(2u+3) - u - 1 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

$$INT := [0, 1, 0, 1] :$$

`display(plot2D(rABCD(u, v), INT), color = blue, gridlines, style = surface, transparency = 0.6, view = [-1 ..6, -4 ..4], labels = [x, y])`



Generel parametrisering af en 'firkant' med 2 buede sider i \mathbb{R}^2

restart

with(plots) :

with(plot2D3D2) = [NormalVektorer, TangentVektorer, plot2D, plot3D]

unprotect('D')

Givet de 4 punkter, som udspænder en firkant $\square ABCD$:

$$A := \langle a_1, a_2 \rangle : B := \langle b_1, b_2 \rangle : C := \langle c_1, c_2 \rangle : D := \langle d_1, d_2 \rangle :$$

Parametriseringen af den buede forbindelseslinje mellem A og B:

$$r_{AB}(u) := \langle u, f(u) \rangle :$$

u ligger mellem a_1 og b_1 .

f skal opfylde, at $f(a_1) = a_2$ og $f(b_1) = b_2$.

Parametriseringen af den rette linje mellem D og C:

$$r_{DC}(u) := \langle u, g(u) \rangle :$$

hvor u ligger mellem d_1 og c_1 .

g skal opfylde, at $f(d_1) = d_2$ og $f(c_1) = c_2$.

Nu skal man sørge for, at et løbende punkt på linjen AB gennemløbes i samme takt som linjen DC!

Vælger at parameteren u skal være i intervallet $[0; 1]$.

Når $u = 0$ skal man være i A hhv. D.

Når $u = 1$ skal man være i B hhv. C.

Skalerer u for AB-linjen, så den løber mellem 0 og 1:

$$r_{AB2}(u) := r_{AB}((b_1 - a_1) \cdot u + a_1) :$$

$$r_{AB2}(u) = \begin{bmatrix} (b_1 - a_1) u + a_1 \\ f((b_1 - a_1) u + a_1) \end{bmatrix}$$

Skalerer u for DC-linjen så den løber mellem 0 og 1:

$$r_{DC2}(u) := r_{DC}((c_1 - d_1) \cdot u + d_1) :$$

$$r_{DC2}(u) = \begin{bmatrix} (c_1 - d_1) u + d_1 \\ g((c_1 - d_1) u + d_1) \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillingerne af den **røde** og del **blå** linje gennemløber nu AB hhv. DC, når u løber fra 0 til 1!!!!

Forbinder så et punkt på den **røde** linje med punktet på den **blå** linje, som har samme u -værdi:

$$r_{ABtilCD}(u) := r_{DC2}(u) - r_{AB2}(u) :$$

$$r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} (c_1 - d_1) u + d_1 - (b_1 - a_1) u - a_1 \\ g((c_1 - d_1) u + d_1) - f((b_1 - a_1) u + a_1) \end{bmatrix}$$

Denne vektors længde varierer mellem 0 og fuld længde via faktoren v :

$$v \cdot r_{ABtilCD}(u) = \begin{bmatrix} v((c_1 - d_1) u + d_1 - (b_1 - a_1) u - a_1) \\ v(g((c_1 - d_1) u + d_1) - f((b_1 - a_1) u + a_1)) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Få et få et punkt i firkanten skal punktet på AB adderes til vektoren:

$$r_{ABCD}(u, v) := v \cdot r_{ABtilCD}(u) + r_{AB2}(u) :$$

Parametriseringen af firkanten lyder:

$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v((c_1 - d_1)u + d_1 - (b_1 - a_1)u - a_1) + (b_1 - a_1)u + a_1 \\ v(g((c_1 - d_1)u + d_1) - f((b_1 - a_1)u + a_1)) + f((b_1 - a_1)u + a_1) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Test af parametriseringen

$$f(x) := -2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot x\right) + 2 :$$

$$a_1 := 0 :$$

$$a_2 := f(a_1) = 2$$

$$b_1 := 3 :$$

$$b_2 := f(b_1) = -2 \sin(2) + 2$$

$$\text{evalf}(b_2) = 0.181405146$$

$$g(x) := 4 - \frac{1}{50} \cdot e^x :$$

$$c_1 := 5 :$$

$$c_2 := g(c_1) = 4 - \frac{1}{50} e^5$$

$$\text{evalf}(c_2) = 1.031736818$$

$$d_1 := 1 :$$

$$d_2 := g(d_1) = 4 - \frac{1}{50} e$$

$$\text{evalf}(d_2) = 3.945634363$$

$$r_{ABCD}(u, v) = \begin{bmatrix} v(u + 1) + 3u \\ v\left(2 - \frac{e^{4u+1}}{50} + 2 \sin(2u)\right) - 2 \sin(2u) + 2 \end{bmatrix}$$

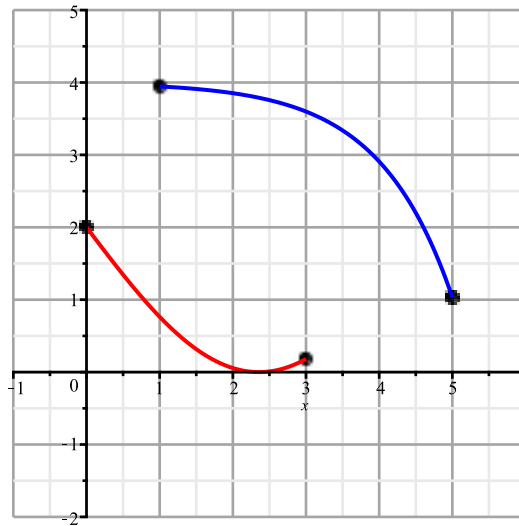
hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

$P := \text{pointplot}([[a_1, a_2], [b_1, b_2], [c_1, c_2], [d_1, d_2]], \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{symbolsize} = 20, \text{gridlines}) :$

$AB := \text{plot}(f(x), x = a_1..b_1, \text{color} = \text{red}, \text{gridlines}) :$

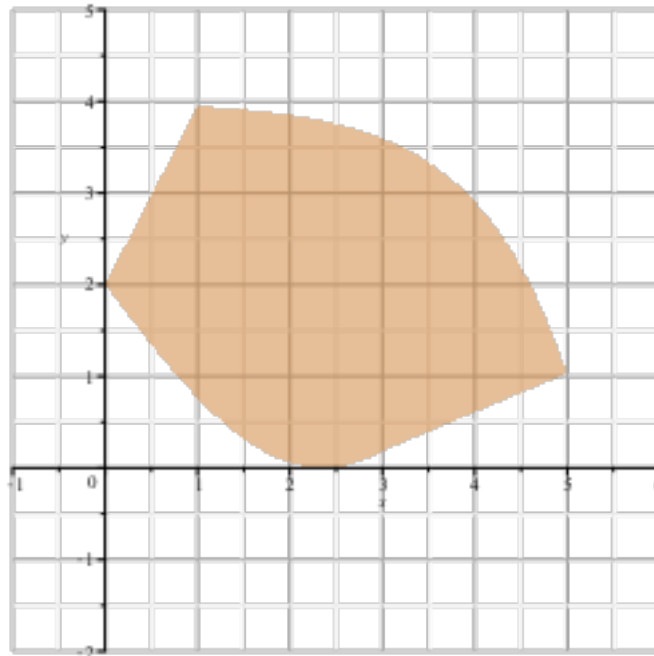
$DC := \text{plot}(g(x), x = d_1..c_1, \text{color} = \text{blue}, \text{gridlines}) :$

$DD1 := \text{display}(P, AB, DC, \text{view} = [-1..6, -2..5])$

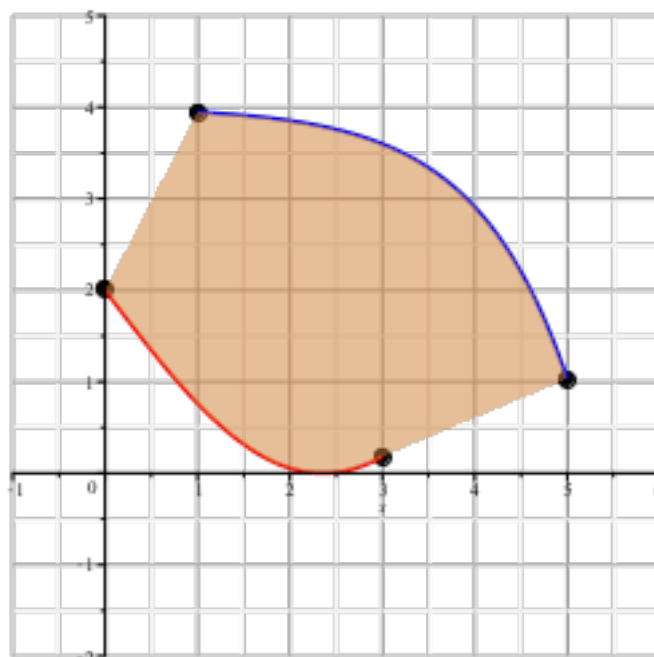


$INT := [0, 1, 0, 1]$:

$DD2 := display(plot2D(r_{ABCD}(u, v), INT), color = gold, gridlines, style = surface, transparency = 0.5, view = [-1 .. 6, -2 .. 5], labels = [x, y])$



$display(DD1, DD2)$



Det passer!!!!