Jacobi-matrix og Jacobi-faktor i integralregning

Kurve i $\mathbb{R}^2$ eller i $\mathbb{R}^3$ (Jacobi-faktor anvendes til beregning af længde)

$\mathbb{R}^2$

> *restart*

Parametrisering (eksempel):
NB: 1 parameter beskriver en kurve i $\mathbb{R}^2$.

> $r(u) := \langle 2 \cdot u^2, u + 2 \rangle$:
> $'r(u)' = r(u)$

$$r(u) = \begin{bmatrix} 2\,u^2 \\ u+2 \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'|$

> $\boldsymbol{Jacobi := LinearAlgebra[Norm](\,diff(r(u), u), 2)}$

$$Jacobi := \sqrt{1 + 16\,|u|^2} \tag{1.1.2}$$

NB: Man må overveje om numerisk værdi kan hæves på kurven.

$\mathbb{R}^3$

> *restart*

Parametrisering (eksempel):
NB: 1 parameter beskriver en kurve i $\mathbb{R}^3$.

> $r(u) := \left\langle 2 \cdot u^2, u + 2, \frac{1}{u} \right\rangle$:
> $'r(u)' = r(u)$

$$r(u) = \begin{bmatrix} 2\,u^2 \\ u+2 \\ \frac{1}{u} \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'|$

> $\boldsymbol{Jacobi := LinearAlgebra[Norm](\,diff(r(u), u), 2)}$

$$Jacobi := \sqrt{1 + 16\,|u|^2 + \frac{1}{|u|^4}} \tag{1.2.2}$$

NB: Man må overveje om numerisk værdi kan hæves på kurven.

Plant område i $\mathbb{R}^2$ (Jacobi-faktor anvendes til beregning af areal)

> *restart*

Parametrisering (eksempel):
NB: 2 parametre beskriver plant område i $\mathbb{R}^2$.

> $r(u, v) := \langle u, v \cdot u^3 \rangle$:

> $'r(u, v)' = r(u, v)$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v\,u^3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Jacobi-matricen:
(består af de partielle afledede opsat som søjler i en 2 x 2 matrix)

> $J := VectorCalculus[Jacobian](r(u, v), [u, v])$

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3\,v\,u^2 & u^3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Jacobi-faktoren:

> $Jacobi := LinearAlgebra[Determinant](J)$

$$Jacobi := u^3 \quad (2.3)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|det(r'_u, r'_v)|$

> $\boldsymbol{Jacobi := LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v), [u, v]))}$

$$Jacobi := u^3 \quad (2.4)$$

NB: Evt. skal man tage den numeriske værdi!

> $\boldsymbol{Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v), [u, v]))|}$

$$Jacobi := |u|^3 \quad (2.5)$$

Plan-integral beregnet som et flade-integral

Hvis man har givet et plant område i $\mathbb{R}^2$ kan man faktisk beregne arealet som et fladeintegral frem for et planintegral.
Det gør man blot ved at udvide parametriseringen med 3. koordinaten $z = 0$.

Eksemplet ovenfor anvendes.

> $restart$

> $r(u, v) := \langle u, v \cdot u^3 \rangle$:

> $'r(u, v)' = r(u, v)$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v\,u^3 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Udvidet parametrisering:

> $R(u, v) := \langle u, v \cdot u^3, 0 \rangle$:

> $'R(u, v)' = R(u, v)$

$$R(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v\,u^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'_u \times r'_v|$

> $Jacobi := LinearAlgebra[Norm](diff(R(u, v), u) \times diff(R(u, v), v), 2)$

$$Jacobi := |u|^3 \quad (2.1.3)$$

Altså samme resultat som ved brug af formlen for Jacobi-faktoren ved plan-integral.

Flade i $\mathbb{R}^3$ (Jacobi-faktor anvendes til beregning af areal)

> *restart*

Parametrisering (eksempel):
NB: 2 parametre beskriver flade i $\mathbb{R}^3$.

> $r(u, v) := \langle u, v \cdot u^2, u \rangle$:

> $'r(u, v)' = r(u, v)$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v\,u^2 \\ u \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|r'_u \times r'_v|$

> $Jacobi := LinearAlgebra[Norm](diff(r(u, v), u) \times diff(r(u, v), v), 2)$

$$Jacobi := \sqrt{2}\,|u|^2 \quad (3.2)$$

NB: Man må overveje om numerisk værdi kan hæves på fladen.

Rumligt område i $\mathbb{R}^3$ (Jacobi-faktor anvendes til beregning af rumfang)

> *restart*

Parametrisering (eksempel):
NB: 3 parametre beskriver et område i $\mathbb{R}^3$.

> $r(u, v, w) := \langle u, v \cdot u^3, w \cdot u \rangle$:

> $'r(u, v, w)' = r(u, v, w)$

$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \\ v\,u^3 \\ w\,u \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Jacobi-matricen:
(består af de partielle afledede opsat som søjler i en 3 x 3 matrix)

> $J := VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w])$

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3\,v\,u^2 & u^3 & 0 \\ w & 0 & u \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Jacobi-faktoren:

> $Jacobi := LinearAlgebra[Determinant](J)$

$$Jacobi := u^4 \quad (4.3)$$

Jacobi-faktoren:

Formlen: $|det(r'_u, r'_v, r'_w)|$

> $Jacobi := LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]))$

$$Jacobi := u^4 \tag{4.4}$$

NB: Evt. skal man tage den numeriske værdi!

> $Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]))|$

$$Jacobi := |u|^4 \tag{4.5}$$