

Eksempel på funktion af 2 variable, som har egentligt lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo, men som ikke har lokalt minimum i origo!

Eksemplet er hentet fra side 122 i bogen "**Counterexamples in Analysis**":

http://books.google.com/books?id=cDAMh5n4lkkC&printsec=frontcover&hl=da&source=gbs_navlinks_s#v=onepage&q=&f=false

<https://www.bookdepository.com/Counterexamples-Analysis-Bernard-R-Gelbaum/9780486428758?ref=grid-view&qid=1580991581803&sr=1-1>

13. A differentiable function of two variables possessing no extremum at the origin but for which the restriction to an arbitrary line through the origin has a strict relative minimum there.

The function

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

has no relative extremum at the origin since there are points of the form $(0, b)$ arbitrarily near the origin at which f is positive, and also points of the form $(a, 2a^2)$ arbitrarily near the origin at which f is negative. If the domain of f is restricted to the x axis, the restricted function $3x^4$ has a strict absolute minimum at $x = 0$. If the domain of f is restricted to the y axis, the restricted function y^2 has a strict absolute minimum at $y = 0$. If the domain of f is restricted to the line $y = mx$ through the origin where $0 < |m| < +\infty$, the restricted function of the parameter x :

$$g(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$$

has a strict relative minimum at the origin since $g'(0) = 0$ and $g''(0) = 2m^2 > 0$.

> restart

> with(plots) :

> $f(x, y) := (y - x^2) \cdot (y - 3 \cdot x^2) :$

> expand($f(x, y)$)

$$3x^4 - 4x^2y + y^2$$

(1)

Ikke lokalt minimum i origo

Grafisk illustration

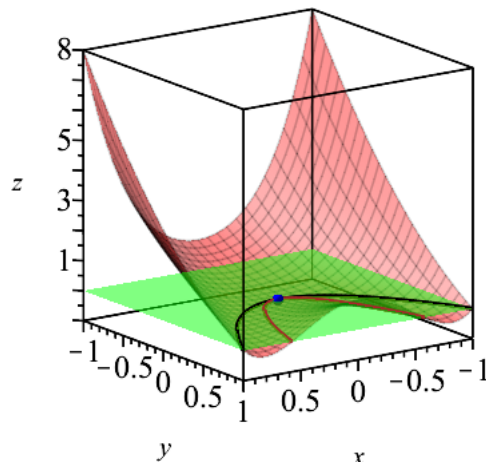
> $graf := plot3d(f(x, y), x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, axes = boxed, labels = [x, y, z], color = red, transparency = 0.5) :$

$golv := implicitplot3d(z = 0, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, z = -1 .. 1, color = green, transparency = 0.5, style = patchnogrid) :$

$parabel1 := spacecurve(\langle t, t^2, 0 \rangle, t = -1 .. 1, color = black, thickness = 3) :$

$parabel2 := spacecurve\left(\langle t, 3 \cdot t^2, 0 \rangle, t = -\frac{1}{\sqrt{3}} .. \frac{1}{\sqrt{3}}, color = brown, thickness = 3\right) :$

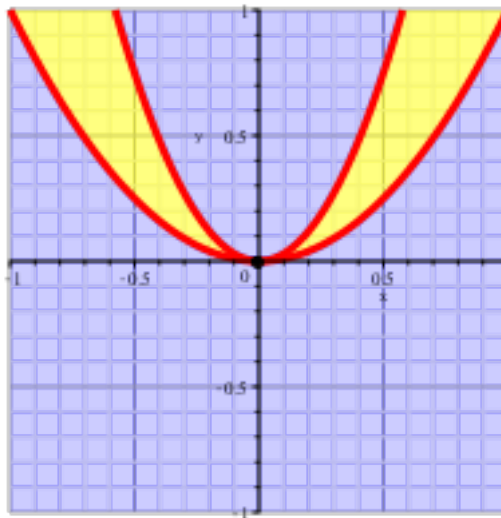
$origo3 := pointplot3d([0, 0, 0], color = blue, symbol = solidsphere, symbolsize = 20) :$
 $display(graf, golv, parabel1, parabel2, origo3)$



Grafisk ses det tydeligt, når man drejer på figuren, at der IKKE er lokalt minimum i origo!

På de 2 parabler er funktionen 0, mens den er negativ mellem de 2 parabler. Ellers er funktionen positiv.

```
> positiv := inequal({f(x, y) > 0}, x=-1..1, y=-1..1, color=blue, transparency=0.8) :
negativ := inequal({f(x, y) < 0}, x=-1..1, y=-1..1, color=yellow, transparency=0.5) :
nul := implicitplot(f(x, y) = 0, x=-1..1, y=-1..1, color=red, thickness=3, numpoints=10000) :
origo2 := pointplot([0, 0], color=black, symbol=solidcircle, symbolsize=20) :
display(positiv, negativ, nul, origo2, gridlines)
```



Funktionen er negativ mellem de 2 parabler, og positiv udenfor. Derfor er der IKKE et lokalt minimum i origo.

NB: Funktionen er defineret som dette produkt: $f(x, y) = (y - x^2) \cdot (y - 3 \cdot x^2)$

Dermed ser man straks, at i mellem de 2 parabler med ligningerne $y = x^2$ hhv. $y = 3 \cdot x^2$, er 1. faktor negativ og 2. faktor positiv. Derfor er f negativ i området mellem de 2 parabler.

Overover begge parabler er begge faktorer positive, derfor er f positiv i det område.

Nedenunder begge parabler er begge faktorer negative, derfor er f positiv i det område.

Matematisk bevis

For at bevise det, ser man på 2 måder at nærme sig origo.

Dels på en parabel $y = 2 \cdot x^2$, som ligger imellem de 2 tegnede, dels på den rette linje $y = 0$.

```
> g(x) := f(x, 2 * x^2) :
```

```
> g(x)
```

$$-x^4$$

(1.2.1)

Det er tydeligt, at funktionen er **negativ** på hele parablen $y = 2 \cdot x^2$ på nær i origo, hvor funktionen er 0.

> $h(x) := f(x, 0) :$

> $h(x)$

$$3x^4$$

(1.2.2)

Det er tydeligt, at funktionen er **positiv** på hele den rette linje $y = 0$ på nær i origo, hvor funktionen er 0.

Hermed er det bevist, at $f(x, y)$ IKKE har lokalt minimum i origo.

▼ Lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo

Ser på restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$ gennem origo (NB: $a \in \mathbb{R}$).

Udtrykket inkluderer ikke den lodrette linje $x = 0$, som skal specialundersøges.

▼ Lodret linje

> $i(y) := f(0, y) :$

> $i(y)$

$$y^2$$

(2.1.1)

Det ses tydeligt, at der er egentligt lokalt minimum i origo, når man tager restriktionen til den lodrette linje $x = 0$ gennem origo.

▼ Ikke-lodret linje

> $j(x) := f(x, a \cdot x) :$

> $j(x)$

$$(ax - x^2)(ax - 3x^2)$$

(2.2.1)

> $mtaylor(j(x), [x=0], 3)$

$$a^2 x^2$$

(2.2.2)

▼ $a \neq 0$ (ikke-vandret, ikke lodret linje)

Taylor-approximationen til 2. orden er klart positiv, når $x \neq 0$.

Derfor er der et egentligt lokalt minimum i 0, når $a \neq 0$.

▼ $a = 0$ (vandret linje)

> $subs(a=0, j(x))$

$$3x^4$$

(2.2.2.1)

Funktionen er klart positiv, når $x \neq 0$.

Derfor er der et egentligt lokalt minimum i 0, når $a = 0$.

▼ I hvilket interval er der lokalt minimum på linjen?

> $j(x) := f(x, a \cdot x) :$

> $j(x)$

$$(ax - x^2)(ax - 3x^2)$$

(3.1)

> $factor(j(x))$

$$x^2(a - x)(a - 3x)$$

(3.2)

> $solve(j(x) = 0, x)$

$$a, \frac{a}{3}, 0, 0$$

(3.3)

▼ Lodret linje

$$\text{> } i(y) := f(0, y) :$$

$$\text{> } i(y)$$

$$y^2$$

(3.1.1)

Altid positiv på nær i $x = 0$.

▼ $a = 0$ (vandret linje)

Antag at $a = 0$:

$$\text{> } \text{subs}(a = 0, j(x))$$

$$3x^4$$

(3.2.1)

Altid positiv på nær i $x = 0$.

▼ $a > 0$ (positiv hældningskoefficient)

Antag at $a > 0$:

Da $a > 0$, er 2 af rødderne *positive*.

Der er 3 forskellige rødder: 0 , $\frac{1}{3} \cdot a$ og a .

0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0 .

Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.

Da $a > 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $]-\infty; 0[$ og $]0; \frac{1}{3} \cdot a[$.

Derfor er der egentligt lokalt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a > 0$.

▼ $a < 0$ (negativ hældningskoefficient)

Antag at $a < 0$:

Da $a < 0$, er 2 af rødderne *negative*.

Der er 3 forskellige rødder: a , $\frac{1}{3} \cdot a$ og 0 .

0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0 .

Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.

Da $a < 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $]\frac{1}{3} \cdot a; 0[$ og $]0; \infty[$.

Derfor er der egentligt lokalt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a < 0$.

Generelt kan man sige, at - bortset fra den lodrette og den vandrette linje -

vil origo være egentligt lokalt minimum på linjen i intervallet $]-\frac{1}{3} \cdot |a|, \frac{1}{3} \cdot |a|[$.

Det betyder også, at når linjens hældningskoefficient a nærmer sig 0 , så vil intervallets længde gå imod 0 !

Derfor kan f have egentligt lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo, og sådan at f ikke har et lokalt minimum i origo!