Planintegral (i 2 dimensioner)

restart
with(plots) :
with(Integrator8) :
with(plot2D3D2) = [*NormalVektorer, TangentVektorer, plot2D, plot3D*]
with(VektorAnalyse4) = [*div, grad, kryds, prik, rot, vop*]

Parameterfremstilling af 2D-område i planen (eksempel)

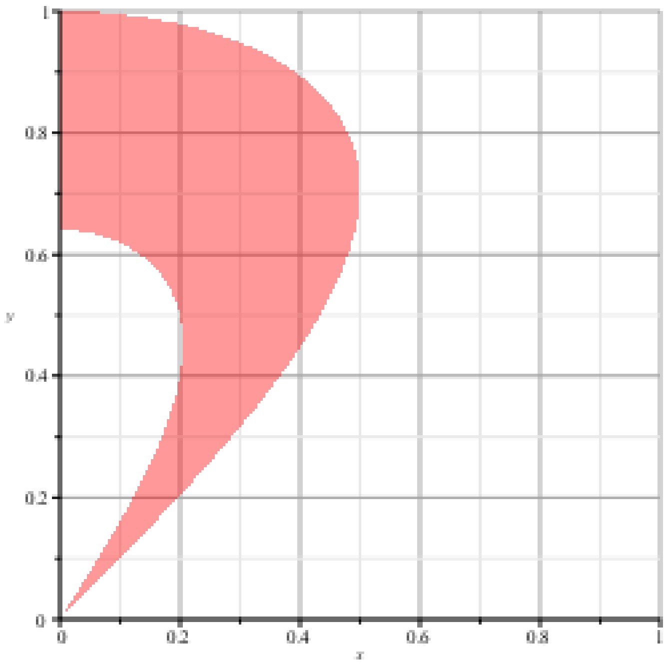
Parameterfremstilling af et 2D-område, hvor $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ og $v \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$:

$r(u, v) := \langle v^4 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u), v^2 \cdot \cos(u) \rangle$:

$INT := \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1\right]$:

Graf

$G := display(plot2D(r(u, v), INT), color = red, gridlines, style = surface, transparency = 0.6, view = [0..1, 0..1], labels = [x, y])$



Areal af 2D-området

Trinvis

Først beregnes de partielle afledede. Opstilles i en 2 x 2 matrix kaldet Jacobi-matricen:

$$J := VectorCalculus[Jacobian](r(u, v), [u, v]) = \begin{bmatrix} v^4 \cos(u)^2 - v^4 \sin(u)^2 & 4\, v^3 \sin(u) \cos(u) \\ -v^2 \sin(u) & 2\, v \cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som den numeriske værdi af determinanten af Jacobi-matricen:

$Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](J)| = 2 \left|\cos(u)^3 v^5 + v^5 \sin(u)^2 \cos(u)\right|$

$Jacobi := simplify(Jacobi) = 2\, |v|^5\, |\cos(u)|$

Arealet bestemmes så ved et dobbeltintegral:

$$\int_{\frac{4}{5}}^{1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot Jacobi\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{3843}{15625}$$

Med færdig formel

$$\int_{\frac{4}{5}}^{1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\left|LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u,v),[u,v]))\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{3843}{15625}$$

Med Integrator8-pakken

$$INT = \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1\right]$$

$$planIntGo(r, INT, 1) = \frac{3843}{15625}$$

$$evalf(\%) = 0.2459520000$$

Konklusion: arealet af 2D-området er ca. $\underline{\underline{0.25}}$

Masse af 2D-området

Hvis man antager, at 2D-området har en massetæthed (masse pr. arealenhed) kaldet f, så kan man beregne områdets samlede **masse**.

I dette eksempel afhænger massetætheden af både x og y:

$$f(x,y) := x + y:$$

Trinvis

Først beregnes de partielle afledede. Opstilles i en 2 x 2 matrix kaldet Jacobi-matricen:

$$J := VectorCalculus[Jacobian](r(u,v),[u,v]) = \begin{bmatrix} v^4\cos(u)^2 - v^4\sin(u)^2 & 4v^3\sin(u)\cos(u) \\ -v^2\sin(u) & 2v\cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som den numeriske værdi af determinanten:

$$Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](J)| = 2\left|\cos(u)^3 v^5 + v^5\sin(u)^2\cos(u)\right|$$

$$Jacobi := simplify(Jacobi) = 2\,|v|^5\,|\cos(u)|$$

$$\int_{\frac{4}{5}}^{1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(vop(r(u,v)))\cdot Jacobi\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{2905683}{48828125} + \frac{325089\,\pi}{6250000}$$

Med færdig formel

$$\int_{\frac{4}{5}}^{1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(vop(r(u,v)))\cdot\left|LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u,v),[u,v]))\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{2905683}{48828125} + \frac{325089\,\pi}{6250000}$$

Med Integrator8-pakken

$INT = \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1\right]$

$M := planIntGo(r, INT, f) \ = \frac{2905683}{48828125} + \frac{325089}{6250000}\pi$

$evalf(\%) = 0.2229159421$

Konklusion: 2D-områdets masse er ca. 0.22

Massemidtpunktet af 2D-området

Hvis man antager, at 2D-området har en massetæthed (masse pr. arealenhed) kaldet f, så kan man beregne områdets samlede masse.
Og beregne **massemidtpunktets placering**.

I dette eksempel afhænger massetætheden af både x og y med samme f som ovenfor.

Standardmetoden fra eNoterne

$INT_x := r(u, v)[1] \cdot f(vop(r(u, v))) \cdot Jacobi =$
$2\, v^4 \sin(u) \cos(u) \left(v^4 \sin(u)\cos(u) + v^2 \cos(u)\right) |v|^5 |\cos(u)|$

$INT_x := simplify(\%)$ assuming $v > 0 = 2\, v^{11} \sin(u)\cos(u)^2 \left(v^2 \sin(u) + 1\right) |\cos(u)|$

$INT_y := r(u, v)[2] \cdot f(vop(r(u, v))) \cdot Jacobi = 2\, v^2 \cos(u) \left(v^4 \sin(u)\cos(u) + v^2\cos(u)\right) |v|^5 |\cos(u)|$

$INT_y := simplify(\%)$ assuming $v > 0 = 2\, v^9 \cos(u)^2 \left(v^2 \sin(u) + 1\right) |\cos(u)|$

$$\frac{\left[\int_{\frac{4}{5}}^{1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} INT_x \, du\right) dv, \int_{\frac{4}{5}}^{1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} INT_y \, du\right) dv\right]}{M} = \frac{\left[\frac{97434755193}{1708984375000}, \frac{308242443}{1953125000}\right]}{\frac{2905683}{48828125} + \frac{325089\,\pi}{6250000}}$$

$evalf(\%) = [0.2557612098, 0.7079804581]$

Punktet er lavet som en **liste**, så ligner det koordinatparret, og er let at plotte med *pointplot*.
NB: Man kan dividere en hel liste med et tal uden at bruge ~!

Med Integrator8-pakken

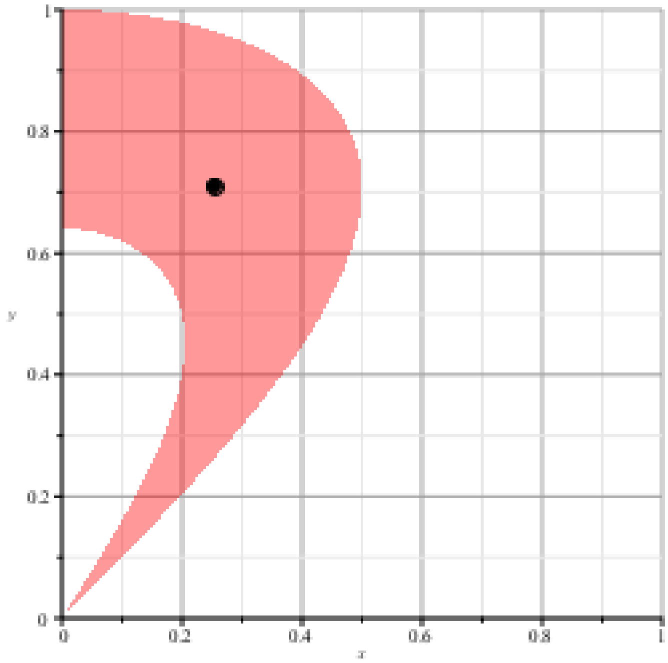
Parametrene til *planCmGo* er: parametriseringen, parameter-intervallerne, funktionen.

$planCmGo\left(r, \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1\right], f\right) = \left[\frac{64956503462}{67799270000 + 59261015625\,\pi}, \frac{205494962}{77484880 + 67726875\,\pi}\right]$

$CM := evalf(\%) = [0.2557612098, 0.7079804581]$

Plot med massemidtpunktet

$P := pointplot([CM], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 20):$
$display(G, P)$



Konklusion: 2D-områdets massemidtpunkt ligger ca. i $\underline{\underline{(0.26, 0.71]}}$