2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter

Generel algoritme til bestemmelse af en partikulær løsning, når højre siden er et polynomium

Opgave 3A, Uge 13, StoreDag

Betragt den lineære afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ givet ved

$$f(x(t)) = x''(t) + 3x'(t) - 4x(t)\,.$$

A Gæt en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$f(x(t)) = 29 - 12t$$

og opstil derefter den fuldstændige løsning til ligningen.

$f(X) := diff(X, t, t) + 3\cdot diff(X, t) - 4\cdot X:$

$f(x(t)) = \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + 3\,\frac{d}{dt}\,x(t) - 4\,x(t)$

$f(\cos(t)) = -5\cos(t) - 3\sin(t)$

$dsolve(f(x(t)) = 0) = x(t) = \_C1\, e^{t} + \_C2\, e^{-4t}$

Simuleret håndregning, når højre side er $29 - 12\cdot t$

restart

$f(X) := diff(X, t, t) + 3\cdot diff(X, t) - 4\cdot X:$

$HS := 29 - 12\cdot t = 29 - 12\,t$

$GÆT := a\cdot t + b:$

$VS := f(GÆT) = -4\,a\,t + 3\,a - 4\,b$

$L := solve(\{-4\cdot a = -12, 3\cdot a - 4\cdot b = 29\}) = \{a = 3, b = -5\}$

$a := rhs(L[1]) : b := rhs(L[2]) :$

$GÆT = 3\,t - 5$

Inhomogen partikulær løsning: $\underline{\underline{x(t) = 3\cdot t - 5}}$

Maple tjek:

$dsolve(f(x(t)) = HS) = x(t) = e^{t}\,\_C2 + e^{-4t}\,\_C1 + 3\,t - 5$

Generel algoritme, når den inhomogene del er et polynomium

Herunder vises, hvordan man kan programmere en generel algoritme i Maple, som finder den partikulære løsning!

Følger metode 18.6 i eNote 18.

> **Metode 18.6 Polynomium**
>
> Givet den inhomogene differentialligning
>
> $$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{18-32}$$
>
> hvor q er et n-te gradspolynomium. Hvis $a_0 \neq 0$ findes der et polynomium af grad n som er en partikulær løsning til differentialligningen. Generelt findes der et polynomium af grad højst $n+2$ som er en partikulær løsning til differentialligningen. Man finder partikulære løsninger på de nævnte former ved at indsætte polynomier af passende grad med ubekendte koefficienter i differentialligningens venstreside og afstemme med q, jf. identitetssætningen for polynomier, eNote 2, sætning 2.15.

Årsagen til at man må prøve med et polynomium, som er 2 grader højere end højresidens polynomium er, at 2. ordens differentialligningens vesntre side kan resultere i et polynomium, som er op til 2 grader lavere. Hvis $a_0 = 0$, så bliver resultatet 1 grad lavere. Hvis både $a_0 = 0$ og $a_1 = 0$, så bliver resultatet 2 grader lavere.

Brugeren skal indtaste de 2 næste linjer (markeret med **rødt**), nemlig venstre side af differentialligningen ($f(X)$) og højre side af differentialligningen (HS).

restart

Indtast (afhænger af opgaveteksten)

Indskriv venstre side af differentialligningen (som en funktion):

$f(X) := diff(X, t, t) + 3 \cdot diff(X, t) - 4 \cdot X:$

Højre siden (den inhomogene del) indskrives, så kører resten automatisk:

$HS := 29 - 12 \cdot t:$

Her kører den generelle algoritme

Graden af højre siden +2:

$n := degree(HS) + 2 = 3$

Generel polynomium af grad 2 højere end højresiden opbygges:

```
GÆT := 0 :
for i from 0 to n do
    GÆT := GÆT + c[i]·t^i :
od:
```

$GÆT = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$

Gættet indsættes i venstre siden og omstruktureres efter potenser af t:

$VS := f(GÆT) = -4 t^3 c_3 - 4 t^2 c_2 + 9 t^2 c_3 - 4 t c_1 + 6 t c_2 + 6 t c_3 - 4 c_0 + 3 c_1 + 2 c_2$

$VS := collect(VS, t) = -4 c_3 t^3 + (-4 c_2 + 9 c_3) t^2 + (-4 c_1 + 6 c_2 + 6 c_3) t - 4 c_0 + 3 c_1 + 2 c_2$

Koefficienterne i de 2 polynomier skal være ens. Det giver løsningen på koefficienterne:

$L := solve(\{seq(coeff(VS, t, i) = coeff(HS, t, i), i = 0..n)\}, \{seq(c[i], i = 0..n)\})$

$\{c_0 = -5, c_1 = 3, c_2 = 0, c_3 = 0\}$

Nu opbygges løsningen, som et er polynomium:

$LØSN := 0 :$

for i **from** 0 **to** n **do**

$c[i] := rhs(L[i+1]) :$

$LØSN := LØSN + c[i] \cdot t^i :$

od:

En inhomogen partikulær løsning er så:

$LØSN = -5 + 3\,t$

Maple tjek:

$dsolve(f(x(t)) = HS) = x(t) = e^{-4\,t}\,\_C2 + e^{t}\,\_C1 - 5 + 3\,t$

Kæmpe eksempel med den generelle algoritme: $29 - 2 \cdot t + t^2 - 2 \cdot t^3 + t^7$

restart

Indskriv venstre side af differentialligningen (som en funktion):

$f(X) := diff(X, t, t) + 3 \cdot diff(X, t) - 4 \cdot X :$

Højre siden (den inhomogene del) indskrives, så kører resten automatisk:

$HS := 29 - 2 \cdot t + t^2 - 2 \cdot t^3 + t^7 :$

Graden af højre siden er:

$n := degree(HS) + 2 = 9$

Generel polynomium af grad 2 højere end højresiden opbygges:

$GÆT := 0 :$

for i **from** 0 **to** n **do**

$GÆT := GÆT + c[i] \cdot t^i :$

od:

$GÆT = = c_9\,t^9 + c_8\,t^8 + c_7\,t^7 + c_6\,t^6 + c_5\,t^5 + c_4\,t^4 + c_3\,t^3 + c_2\,t^2 + c_1\,t + c_0$

Gættet indsættes i venstre siden og omstruktureres efter potensen af t:

$VS := f(GÆT) =$

$$-4\,t^9 c_9 - 4\,t^8 c_8 + 27\,t^8 c_9 - 4\,t^7 c_7 + 24\,t^7 c_8 + 72\,t^7 c_9 - 4\,t^6 c_6 + 21\,t^6 c_7 + 56\,t^6 c_8 - 4\,t^5 c_5 + 18\,t^5 c_6 + 42\,t^5 c_7 - 4\,t^4 c_4 + 15\,t^4 c_5 + 30\,t^4 c_6 - 4\,t^3 c_3 + 12\,t^3 c_4 + 20\,t^3 c_5 - 4\,t^2 c_2 + 9\,t^2 c_3 + 12\,t^2 c_4 - 4\,t\,c_1 + 6\,t\,c_2 + 6\,t\,c_3 - 4\,c_0 + 3\,c_1 + 2\,c_2$$

$VS := collect(VS, t) =$

$$-4\,c_9 t^9 + (-4\,c_8 + 27\,c_9)\,t^8 + (-4\,c_7 + 24\,c_8 + 72\,c_9)\,t^7 + (-4\,c_6 + 21\,c_7 + 56\,c_8)\,t^6 + (-4\,c_5 + 18\,c_6 + 42\,c_7)\,t^5 + (-4\,c_4 + 15\,c_5 + 30\,c_6)\,t^4 + (-4\,c_3 + 12\,c_4 + 20\,c_5)\,t^3 + (-4\,c_2 + 9\,c_3 + 12\,c_4)\,t^2 + (-4\,c_1 + 6\,c_2 + 6\,c_3)\,t - 4\,c_0 + 3\,c_1 + 2\,c_2$$

Koefficienterne i de 2 polynomier skal være ens. Det giver løsningen på koefficienterne:

$L := solve(\{seq(coeff(VS, t, i) = coeff(HS, t, i), i = 0..n)\}, \{seq(c[i], i = 0..n)\})$

$$\left\{c_0 = -\frac{4148737}{4096}, c_1 = -\frac{1029631}{1024}, c_2 = -\frac{257537}{512}, c_3 = -\frac{21461}{128}, c_4 = -\frac{5355}{128}, c_5 = -\frac{273}{32}, c_6 = -\frac{21}{16}, c_7 = -\frac{1}{4}, c_8 = 0, c_9 = 0\right\}$$

Nu opbygges løsningen, som et er polynomium:
$LØSN := 0$:
for i **from** 0 **to** n **do**
$c[i] := rhs(L[i+1])$:
$LØSN := LØSN + c[i] \cdot t^i$:
od:

En inhomogen partikulær løsning er så:
$$LØSN = -\frac{4148737}{4096} - \frac{1029631}{1024} t - \frac{257537}{512} t^2 - \frac{21461}{128} t^3 - \frac{5355}{128} t^4 - \frac{273}{32} t^5 - \frac{21}{16} t^6 - \frac{1}{4} t^7$$

Maple tjek:
$dsolve(f(x(t)) = HS) =$
$$x(t) = e^{-4t} \_C2 + e^{t} \_C1 - \frac{4148737}{4096} - \frac{1029631\, t}{1024} - \frac{257537\, t^2}{512} - \frac{21461\, t^3}{128} - \frac{5355\, t^4}{128} - \frac{273\, t^5}{32} - \frac{21\, t^6}{16} - \frac{t^7}{4}$$

Eksempel hvor det faktisk er nødvendigt at gå 2 grader over højresiden

restart
Indskriv venstre side af differentialligningen (som en funktion):
$f(X) := diff(X, t, t)$:
Højre siden (den inhomogene del) indskrives, så kører resten automatisk:
$HS := 29 - 2 \cdot t + t^2 - 2 \cdot t^3 + t^7$:

Graden af højre siden er:
$n := degree(HS) + 2 = 9$

Generel polynomium af grad 2 højere end højresiden opbygges:
$GÆT := 0$:
for i **from** 0 **to** n **do**
$GÆT := GÆT + c[i] \cdot t^i$:
od:
$GÆT = = c_9 t^9 + c_8 t^8 + c_7 t^7 + c_6 t^6 + c_5 t^5 + c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$

Gættet indsættes i venstre siden og omstruktureres efter potensen af t:
$VS := f(GÆT) = 72 t^7 c_9 + 56 t^6 c_8 + 42 t^5 c_7 + 30 t^4 c_6 + 20 t^3 c_5 + 12 t^2 c_4 + 6 t c_3 + 2 c_2$
$VS := collect(VS, t) = 72 t^7 c_9 + 56 t^6 c_8 + 42 t^5 c_7 + 30 t^4 c_6 + 20 t^3 c_5 + 12 t^2 c_4 + 6 t c_3 + 2 c_2$
Koefficienterne i de 2 polynomier skal være ens. Det giver løsningen på koefficienterne:
$L := solve(\{seq(coeff(VS, t, i) = coeff(HS, t, i), i = 0..n)\}, \{seq(c[i], i = 0..n)\}) =$
$$\left\{c_0 = c_0, c_1 = c_1, c_2 = \frac{29}{2}, c_3 = -\frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{12}, c_5 = -\frac{1}{10}, c_6 = 0, c_7 = 0, c_8 = 0, c_9 = \frac{1}{72}\right\}$$
NB: der sket det her, at den homogene løsning $c_1 \cdot t + c_0$ faktisk kommer med her.

Nu opbygges løsningen, som et er polynomium:
$LØSN := 0$:
for i **from** 0 **to** n **do**
$c[i] := rhs(L[i+1])$:
$LØSN := LØSN + c[i] \cdot t^i$:
od:

En inhomogen partikulær løsning er så:

$$L\text{Ø}SN = c_1\, t + c_0 + \frac{29}{2}\, t^2 - \frac{1}{3}\, t^3 + \frac{1}{12}\, t^4 - \frac{1}{10}\, t^5 + \frac{1}{72}\, t^9$$

For at få én partikulær løsning må man stryge $c_1 \cdot t + c_0$ (som jo her er løsningen til den homogene differentialligning)!

<u>Maple tjek</u>:

$$dsolve(f(x(t)) = HS) = x(t) = \frac{1}{72}\, t^9 - \frac{1}{10}\, t^5 + \frac{1}{12}\, t^4 - \frac{1}{3}\, t^3 + \frac{29}{2}\, t^2 + \_C1\, t + \_C2$$