

Rumintegral (3D-område i 3 dimensioner)

restart

with(plots) :

with(Integrator8) :

with(VektorAnalyse4) = [div, grad, kryds, prik, rot, vop]

with(plot2D3D2) = [NormalVektorer, TangentVektorer, plot2D, plot3D]

Parameterfremstilling af et 3D-område i rummet (eksempel)

NB: se filen "fladeint.mw" eller "fladeint.pdf" for detaljer om dette 3D-område.

Parameterfremstilling af 3D-området i rummet, hvor $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $v \in [0; 1]$ og $w \in [0; 1]$:

$r(u, v, w) := \langle v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), w \cdot (1 - v^2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)) \rangle$:

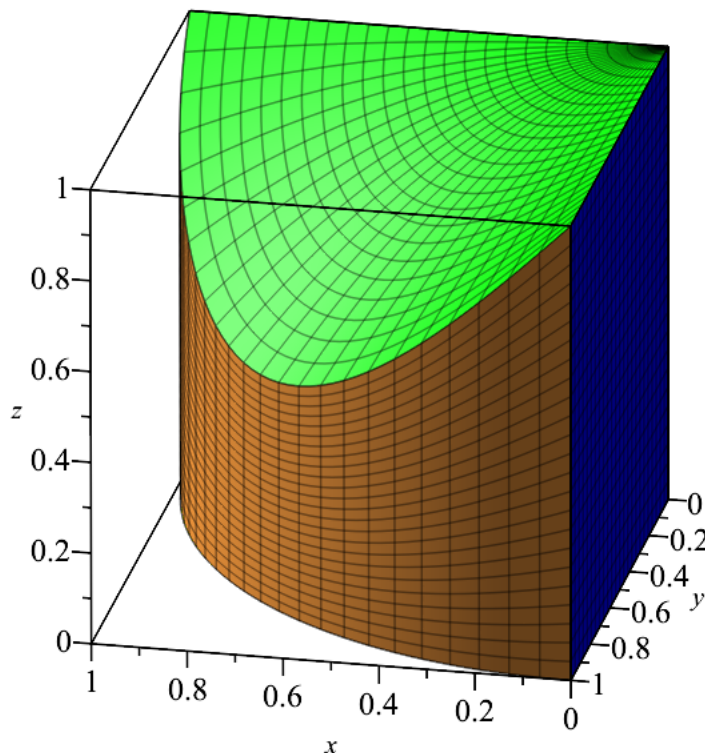
$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} v \cos(u) \\ v \sin(u) \\ w (1 - v^2 \sin(u) \cos(u)) \end{bmatrix}$$

$INT := \left[0, \frac{\pi}{2}, 0, 1, 0, 1\right]$:

Graf over 3D-området i rummet

$FARVER := [red, blue, gray, gold, yellow, green]$:

$display(plot3D(r(u, v, w), INT, FARVER), labels = [x, y, z], axes = boxed)$



▼ Volumen af 3D-området

▼ Trinvis

Jacobi-matricen med de partielle afledede beregnes:

$$J := \text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v, w), [u, v, w]) = \begin{bmatrix} -v \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ v \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ w(-v^2 \cos(u)^2 + v^2 \sin(u)^2) & -2 w v \sin(u) \cos(u) & 1 - v^2 \sin(u) \cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som den numeriske værdi af determinanten:

$$\begin{aligned} \text{Jacobi} &:= |\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](J)| = \\ &|\sin(u)^3 \cos(u) v^3 + \sin(u) \cos(u)^3 v^3 - v \sin(u)^2 - v \cos(u)^2| \\ \text{Jacobi} &:= \text{simplify}(\%) = |v(v^2 \sin(u) \cos(u) - 1)| \\ \text{Jacobi} &:= \text{simplify}(\%) \text{ assuming } v > 0 = v|v^2 \sin(u) \cos(u) - 1| \end{aligned}$$

Arealet bestemmes så ved et trippelintegral:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \text{Jacobi} \, du \, dv \, dw = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}$$

▼ Med færdig formel

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot |\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](\text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v, w), [u, v, w]))| \, du \, dv \, dw = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}$$

▼ Med Integrator8-pakken

$$\text{rumIntGo}(r, \text{INT}, 1) = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{evalf}(\%) = 0.6603981635$$

Konklusion: rumfanget af 3D-området er ca. 0.66

▼ Masse af 3D-området

Hvis man antager, at fladen har en **massetæthed** (masse pr. rumfangsenhed) kaldet f , så kan man beregne 3D-områdets samlede masse.

I dette eksempel afhænger massetætheden alene af z :

$$f(x, y, z) := z:$$

▼ Trinvis

Jacobi-matricen med de partielle afledede beregnes:

$$J := \text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v, w), [u, v, w]) = \begin{bmatrix} -v \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ v \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ w(-v^2 \cos(u)^2 + v^2 \sin(u)^2) & -2 w v \sin(u) \cos(u) & 1 - v^2 \sin(u) \cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som den numeriske værdi af determinanten:

$$\begin{aligned} \text{Jacobi} &:= |\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](J)| = \\ &|\sin(u)^3 \cos(u) v^3 + \sin(u) \cos(u)^3 v^3 - v \sin(u)^2 - v \cos(u)^2| \\ \text{Jacobi} &:= \text{simplify}(\%) = |v(v^2 \sin(u) \cos(u) - 1)| \\ \text{Jacobi} &:= \text{simplify}(\%) \text{ assuming } v > 0 = v|v^2 \sin(u) \cos(u) - 1| \end{aligned}$$

Massen bestemmes så ved et trippelintegral:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\text{vop}(r(u, v, w))) \cdot \text{Jacobi} \, du \, dv \, dw = \frac{25 \pi}{192} - \frac{1}{8}$$

Med færdig formel

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\text{vop}(r(u, v, w))) \cdot |\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](\text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v, w), [u, v, \\ &w]))| \, du \, dv \, dw \\ &= \frac{25 \pi}{192} - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Med Integrator8-pakken

$$\begin{aligned} \text{INT} &= \left[0, \frac{\pi}{2}, 0, 1, 0, 1 \right] \\ \text{rumIntGo}(r, \text{INT}, f) &= \frac{25 \pi}{192} - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{evalf}(\%) = 0.2840615434$$

Konklusion: 3D-områdets masse er ca. 0.28

NB: Beregningerne af massen tager lang tid - især "rumIntGo" fra Integrator8-pakken. Hav tålmodighed!