

Differentiabilitet af vektorfunktion

Man kan ikke se på 2D-banekurve for en vektorfunktion $f(t)=(x(t),y(t))$ om den er differentiabel.

NB: Man skal undersøge om hver af koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er differentiabel.

Eksempel på en differentiabel vektorfunktion af 2 variable

> restart

> with(plots) :

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ t^2 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

> x := t→piecewise(0 < t, t^2, t ≤ 0, 0) :!x(t)!=x(t)

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

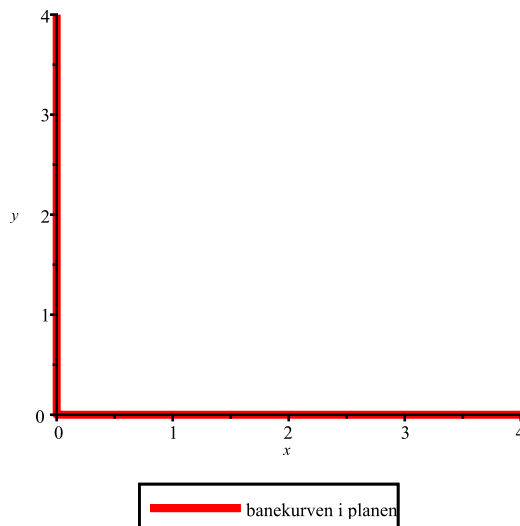
> y := t→piecewise(0 < t, 0, t ≤ 0, t^2) :!y(t)!=y(t)

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \\ t^2 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Banekurven i planen knækker 90° i $(0,0)$:

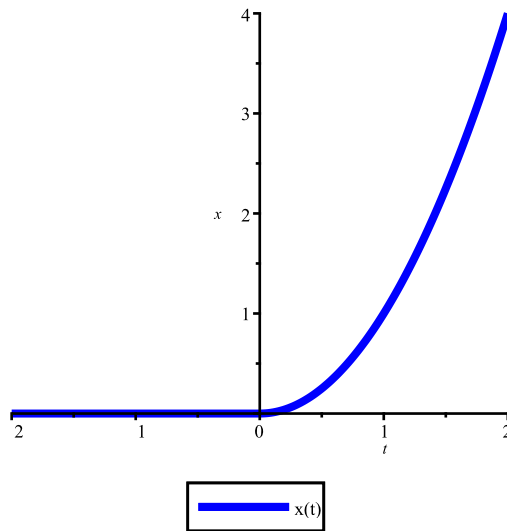
NB: Her er kun 2 kordinater: x og y.

> plot([x(t), y(t), t=-2..2], color=red, thickness=3, labels=[x, y], legend=["banekurven i planen"])

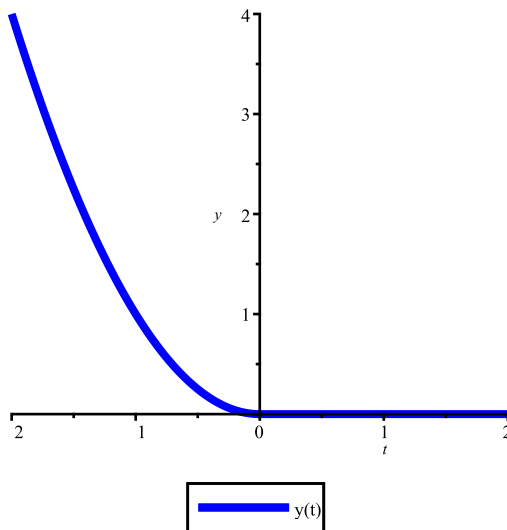


Men funktionen $f(t)=(x(t),y(t))$ er en differentiabel funktion, da **koordinatfunktionerne** $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable:

> plot(x(t), t= -2..2, color=blue, thickness=3, labels=[t, x], legend=["x(t)"])



> `plot(y(t), t = -2..2, color = blue, thickness = 3, labels = [t, y], legend = ["y(t)"])`



Koordinatfunktionernes afledede $x'(t)$ og $y'(t)$ er **kontinuerte** funktioner af t :

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ 2t & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

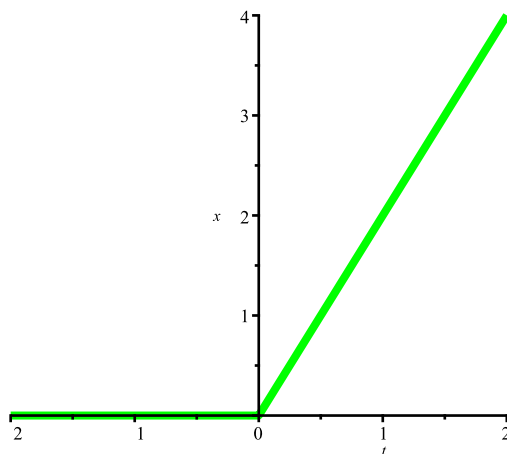
> $x'(t)$


$$\begin{cases} 2t & 0 < t \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

> $y'(t)$

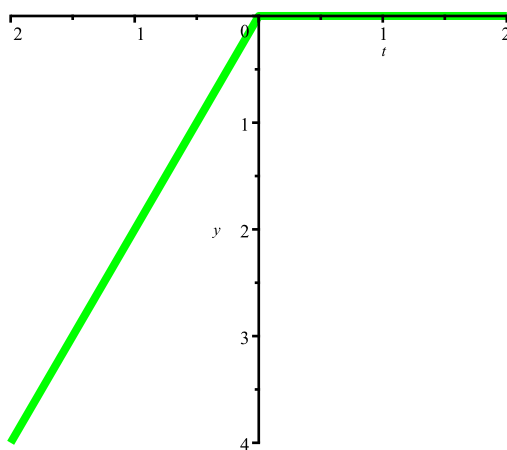
$$\begin{cases} 0 & 0 < t \\ 2t & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$


> `plot(x'(t), t = -2..2, color = green, thickness = 3, legend = ["x'(t)"], labels = [t, x])`



 $x'(t)$

> `plot(y'(t), t = -2..2, color = green, thickness = 3, legend = ["y'(t)"], labels = [t, y])`



 $y'(t)$

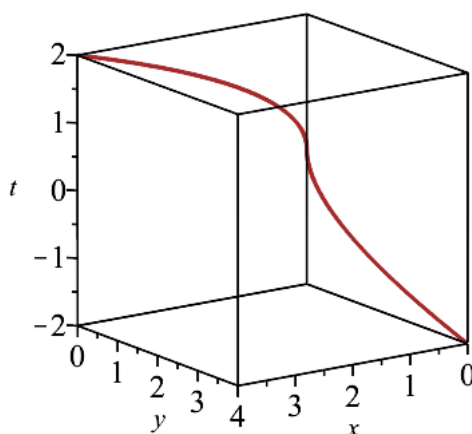
Banekurven i rummet er differentiabel:

NB: Her er 3 kordinater: t, x og y.

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. Grafen er simpelthen glat - også i $t=0$.)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t-aksen går ud af skærmen samt x-aksen til højre og y-aksen opad. Så fremkommer banekurven i x-y-planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t = -2..2, thickness = 3, color = brown, axes = BOXED, labels = [x, y, t])`
 $t=0$.



▼ Eksempel på en ikke-differentiabel vektorfunktion af 2 variable

> restart

> with(plots) :

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

> x := t → piecewise(t < 0, 1/2 · t, t ≥ 0, 2 · t) : 'x(t)' = x(t)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \end{cases} \quad (2.1)$$

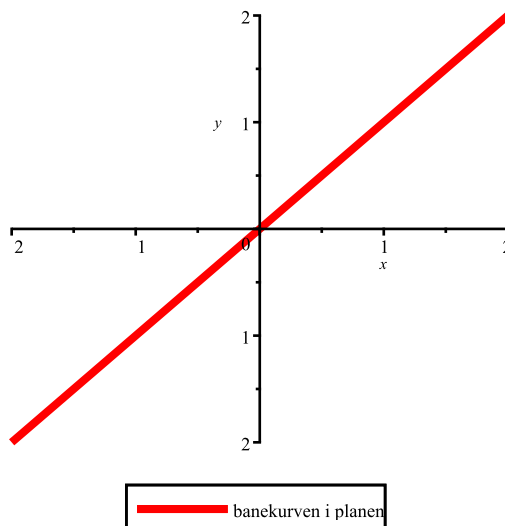
> y := t → piecewise(t < 0, 1/2 · t, t ≥ 0, 2 · t) : 'y(t)' = y(t)

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \end{cases} \quad (2.2)$$

Banekurven i planen er en ret linje:

NB: Her er kun 2 kordinater: x og y.

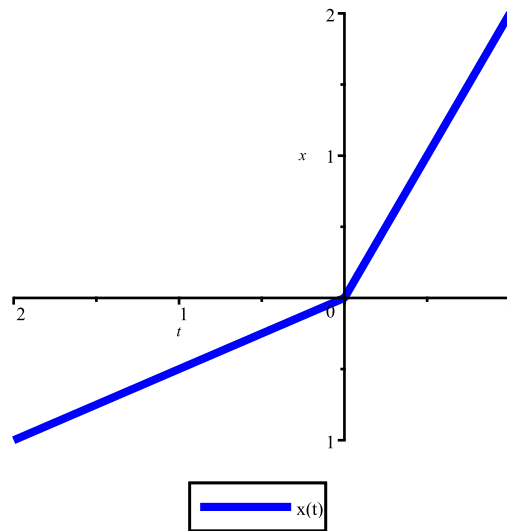
> plot([x(t), y(t), t = -4 .. 1], color = red, thickness = 3, labels = [x, y], legend = ["banekurven i planen"])



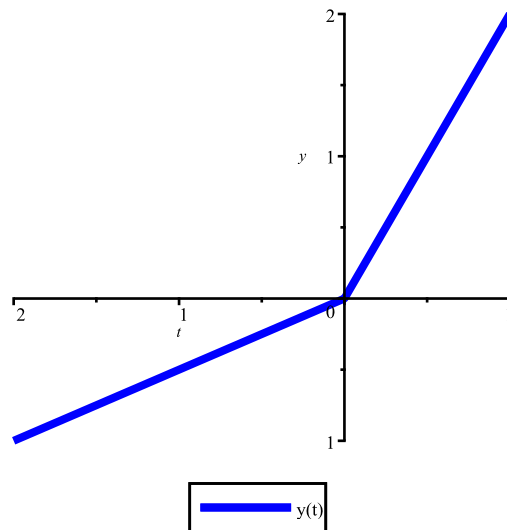
Men **koordinatfunktionerne** $x(t)$ og $y(t)$ er **ikke differentiable**:

(grafnen knækker i 0)

> plot(x(t), t = -2 .. 1, color = blue, thickness = 3, labels = [t, x], legend = ["x(t)"])



> `plot(y(t), t = 2..1, color = blue, thickness = 3, labels = [t, y], legend = ["y(t)"])`



Banekurven i rummet er ikke-differentiabel:

NB: Her er 3 koordinater: t, x og y.

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. *Grafen knækker i $t = 0$.*)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t-aksen går ud af skærmen samt x-aksen til højre og y-aksen opad. Så fremkommer banekurven i x-y-planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t = 2..2, thickness = 3, color = brown, axes = BOXED, labels = [x, y, t])`

