

# Regning med vektorer og matricer i Maple

Overalt i denne beskrivelse anvendes Maple-pakken *LinearAlgebra*.

`restart : with(LinearAlgebra) :`

## Vektorer

### Definition af vektor

Direkte med  $\langle$  og  $\rangle$  samt  $,$  :

$$u := \langle -2, 3, -4 \rangle = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

eller:

Med skabelon fra "Matrix-paletten".

**NB: Der skal stå "Insert Vector[column]" for neden!**

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### Nulvektor

Vektor med litter 0'er:

$$\text{ZeroVector}(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Længde af vektor

$$u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Norm}(u, 2) = \sqrt{29}$$

**NB: Vigtigt, at parameteren 2 skrives.**

**Hvis 2 udelades, så bliver resultatet den numerisk største koordinat (svarende til  $\infty$  normen)!**

$$\text{Norm}(u) = 4$$

$$\text{Norm}(u, \infty) = 4$$

### Enhedsvektor ud fra vektor

$$\text{Normalize}(u, 2) =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{4\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix}$$

**NB: Vigtigt, at parameteren 2 anføres.**

eller:

$$\frac{u}{\text{Norm}(u, 2)} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{4\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix}$$

**NB: Vigtigt, at parameteren 2 anføres.**

## Vinkel mellem 2 vektorer

$$\text{VectorAngle}(u, v) = \arccos\left(\frac{4\sqrt{29}\sqrt{6}}{87}\right)$$

$$\text{evalf}(\%) = 0.9191723423$$

eller:

$$\arccos\left(\frac{u \cdot v}{\text{Norm}(u, 2) \cdot \text{Norm}(v, 2)}\right) = \arccos\left(\frac{4\sqrt{29}\sqrt{6}}{87}\right)$$

$$\text{evalf}(\%) = 0.9191723423$$

$$\frac{\%}{\pi} \cdot 180 = 52.66469585$$

Dvs. vinklen er ca. 0.919 radianer  $\approx$  52.7°

## Krydsprodukt i $\mathbb{R}^3$

$$u \times v = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

eller:

with(VektorAnalyse4) :

$$\text{kryds}(u, v) = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

## Konvertering fra vektor til søjlematrix

v =

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\text{type}(v, \text{Vector}) = \text{true}$

$\text{type}(v, \text{Matrix}) = \text{false}$

$$w := \text{convert}(v, \text{Matrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\text{type}(w, \text{Matrix}) = \text{true}$

$\text{type}(w, \text{Vector}) = \text{false}$

**NB:  $v$  og  $w$  ser ens ud, men fungerer ikke ens!**

**Pas på, når du bruger skabelon fra "Matrix-paletten"!**

## Matricer

### Definition af matrix

Direkte med  $\langle$  og  $\rangle$  samt  $,$  ; og  $|$  :

$$M := \langle 1, 2, 3; 4, 5, 6 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M2 := \langle 1, 2, 3|4, 5, 6 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Med skabelon fra "Matrix-paletten".

**NB: der skal stå "Insert Matrix" for neden!**

$$N := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### Konvertering af matrix til vektor

Konvertering af matrix til vektor (**tages søjlevis**):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{convert}(M, \text{Vector}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

### Visning af en stor matrix

Umiddelbart viser Maple kun indholdet i en matrix på max. 10 x 10.

$$IdentityMatrix(13) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

13 × 13 Matrix

Med denne kommando kan man øge størrelsen til f.eks. 13 x 13:  
`interface(rtablesize = 13) :`

$$IdentityMatrix(13) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ▼ Enhedsmatrix

**Enhedsmatrix af størrelse 4 x 4:**

$$IdentityMatrix(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ▼ Diagonalmatrix

**Diagonalmatrix med 7, 9, 13 og 0 i diagonalen:**

$$DiagonalMatrix([7, 9, 13, 0]) =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Nulmatrix

Kvadratisk matrix med lutter 0'er:

$$\text{ZeroMatrix}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Udtræk af delmatrix

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Udtræk af række 1 til 2, søjle 2 til 3:

$$N[1..2, 2..3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

## Sammensætning af matrix ud fra delmatricer

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\langle M, N \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\langle M, \langle 7|8|9 \rangle \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\langle \langle M, \langle 7|8|9 \rangle \rangle | N \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

## Transponeret matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M^{\%T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Bemærk, at "opløftning" i %T minder utrolig meget om "opløftning" i T, som anvendes i matematik.

## Invers matrix

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**NB: Undlad at anvende *MatrixInverse*, da den også giver et svar, når matricen ikke er kvadratisk!**

## Egenverdier

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Eigenvalues}(N, \text{output} = \text{list}) = [2, 3, 3]$$

Rækkefølgen af de egenverdierne varierer, når man kører filen!

Egenverdierne i listen kan sorteres, så de står i stigende rækkefølge.

**NB: Det giver kun mening, når alle egenverdier er reelle, da der ikke findes nogen ordningsrelation indenfor  $\mathbb{C}$  !!**

$$\text{sort}(\%) = [2, 3, 3]$$

Samlet praktisk udtryk, hvis man skal programmere noget:

$$\text{sort}(\text{Eigenvalues}(N, \text{output} = \text{list}), (x, y) \rightarrow \text{evalf}(x) < \text{evalf}(y)) = [2, 3, 3]$$

NB: *evalf* er nødvendigt, hvis tallene ikke kun er naturlige tal, altså hvis der optræder negative tal eller rødder!

## Stort eksempel

$$R := \begin{bmatrix} 611 & 196 & -192 & 407 & -8 & -52 & -49 & 29 \\ 196 & 899 & 113 & -192 & -71 & -43 & -8 & -44 \\ -192 & 113 & 899 & 196 & 61 & 49 & 8 & 52 \\ 407 & -192 & 196 & 611 & 8 & 44 & 59 & -23 \\ -8 & -71 & 61 & 8 & 411 & -599 & 208 & 208 \\ -52 & -43 & 49 & 44 & -599 & 411 & 208 & 208 \\ -49 & -8 & 8 & 59 & 208 & 208 & 99 & -911 \\ 29 & -44 & 52 & -23 & 208 & 208 & -911 & 99 \end{bmatrix} :$$

$$EV := \text{Eigenvalues}(R, \text{output} = \text{list}) =$$

$$[0, 1020, 510 - 100\sqrt{26}, 510 + 100\sqrt{26}, 10\sqrt{10405}, -10\sqrt{10405}, 1000, 1000]$$

$$\text{sort}(EV) = [0, 1000, 1000, 1020, -10\sqrt{10405}, 10\sqrt{10405}, 510 - 100\sqrt{26}, 510 + 100\sqrt{26}]$$

Alm. sortering ser bort fra fortegnet!

**Korrekt sortering:**

$$\text{sort}(EV, (x, y) \rightarrow \text{evalf}(x) < \text{evalf}(y)) =$$

$$[-10\sqrt{10405}, 0, 510 - 100\sqrt{26}, 1000, 1000, 510 + 100\sqrt{26}, 1020, 10\sqrt{10405}]$$

## Egenvektorer

$$\text{Eigenvectors}(N, \text{output} = \text{list}) = \left[ \left[ 3, 2, \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right], \left[ 2, 1, \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right] \right]$$

NB: Svaret består af liste med diverse elementer.

Første tal er egenværdien, andet tal er algebraiske multiplicitet af egenværdien, 3. del er egenvektorer for egenværdien. Antal vektorer er geometrisk multiplicitet.

## Tolkning

Eksempel på output:

$$\left[ \left[ 2, 1, \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right], \left[ 3, 2, \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right] \right]$$

**rød** = egenværdi

**grøn** = algebraisk multiplicitet

**lilla** = egenvektorer (og antal egenvektorer = geometrisk multiplicitet)

Tolkning af eksemplet:

Svaret er her en liste med 2 elementer. Hvert element er selv en liste! Osv.

Her er der altså to egenværdier, nemlig **2** og **3**.

De algebraiske multipliciteter er:  $am(2) = 1$  og  $am(3) = 2$ .

De geometriske multipliciteter er:  $gm(2) = 1$  og  $gm(3) = 2$ , nemlig antal basisvektorer for egenvektorrømmene.

Egenvektorrømmene er:  $E_2 = \text{span}\{(-1, 1, 0)\}$  og  $E_3 = \text{span}\left\{\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right\}$ .

**NB: Rækkefølgen af de egenværdierne varierer, når man kører kommandoen!**

## Sortering

Ønsker man outputtet sorteret efter egenværdiernes størrelse .

**NB: Det giver kun mening, når alle egenværdier er reelle, da der ikke findes nogen ordningsrelation indenfor  $\mathbb{C}$  !!**

$$\text{sort}(\%, (x, y) \rightarrow \text{evalf}(x[1]) < \text{evalf}(y[1])) = \left[ \left[ 2, 1, \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right], \left[ 3, 2, \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right] \right]$$

Samlet praktisk udtryk, hvis man skal programmere noget:

`sort(Eigenvectors(N, output = list), (x, y) → evalf(x[1]) < evalf(y[1])) =`

$$\left[ \left[ 2, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ 3, 2, \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

### Stort eksempel

$$Q := \text{DiagonalMatrix}([1, -2, \sqrt{3}, -4, 5]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

`Eigenvectors(Q, output = list) =`

$$\left[ \left[ -4, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ 1, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ \sqrt{3}, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ -2, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ 5, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

`sort(Eigenvectors(Q, output = list), (x, y) → evalf(x[1]) < evalf(y[1])) =`

$$\left[ \left[ -4, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ -2, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ 1, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ \sqrt{3}, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[ 5, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

## Egenrum

Basis for egenrummet kan let beregnes som  $\text{NullSpace}(A - \lambda \cdot E)$ :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

`Eigenvalues(N, output = list) = [2, 3, 3]`

$$\text{NullSpace}(N - 3 \cdot \text{IdentityMatrix}(3)) = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

Dvs. basis for egenrummet  $E_3$  er  $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$  og  $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ .

Egenrummet er så  $E_3 = \text{span}\left\{\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right\}$ .

## Gram-Schmidt ortonormaliseringsmetode

Givet et sæt af vektorer, som skal ortonormaliseres:

$$v_1 := \langle 1, 0, 1 \rangle : v_2 := \langle 0, -1, 1 \rangle : v_3 := \langle 0, 2, 1 \rangle :$$



$$\text{GramSchmidt}([v_1, v_2, v_3], \text{normalized}) = \left[ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \right]$$

Indlægges i en **ortogonal**  $Q$ -matrix:

$$Q := \text{Matrix}(\%) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{IsOrthogonal}(Q) = \text{true}$$

## Anvendelse i lineære ligningssystemer

### Et inhomogent ligningssystem

Givet et ligningssystem:

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = 5$$

Koefficientmatrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Højre side:

$$b := \langle 0, 1, 5 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Totalmatrix:

$$T := \langle A|b \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

### Løsning med Gauss-Jordan elimination

Kan løses et trin ad gangen med *RowOperation*.

Her udføres rækkeoperationerne i ét hug:

$$\text{ReducedRowEchelonForm}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Der er 3 initial-ettaller, og 1 fri parameter.

Vælger  $x_3 = t$ . Så kan resten af variablene bestemmes:

$$x_1 = 1 + t, x_2 = 1 - 2 \cdot t, x_4 = -1$$

Dvs. løsningen er:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, -1) + t \cdot (1, -2, 1, 0)$ , hvor  $t \in \mathbb{R}$

### Løsning med LinearSolve

**Pas på: enten  $A$ ,  $b$  eller  $T$  som parametre i parantesen!**

**Men IKKE  $A$  (i det tilfælde vil Maple opfatte  $A$  som en totalmatrix, dvs. sidste søjle i  $A$  opfattes som højresiden).**

$$\text{LinearSolve}(A, b) = \begin{bmatrix} -t_3 + 1 \\ -2 \cdot t_3 + 1 \\ -t_3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{LinearSolve}(T) = \begin{bmatrix} -t_3 + 1 \\ -2 \cdot t_3 + 1 \\ -t_3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen er:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, -1) + t \cdot (1, -2, 1, 0)$ , hvor  $t \in \mathbb{R}$

### Et homogent ligningssystem

Givet et ligningssystem:

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = 0$$

Koefficientmatrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Højre side:

$$b := \langle 0, 0, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Totalmatrix:

$$T := \langle A|b \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

### Løsning med Gauss-Jordan elimination

$$\text{ReducedRowEchelonForm}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Der er 3 initial-ettaller, og 1 fri parameter.

Vælger  $x_3 = t$ . Så kan resten af variablene bestemmes:

$$x_1 = t, x_2 = -2 \cdot t, x_4 = 0$$

Dvs. løsningen er:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (1, -2, 1, 0)$ , hvor  $t \in \mathbb{R}$

### Løsning med LinearSolve

**Pas på: enten  $A$ ,  $b$  eller  $T$  som parametre i parantesen!**

**Men IKKE  $A$  (i det tilfælde vil Maple opfatte  $A$  som en totalmatrix, dvs. sidste søjle i  $A$  opfattes som højresiden).**

$$\text{LinearSolve}(A, b) = \begin{bmatrix} -t l_3 \\ -2 - t l_3 \\ -t l_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{LinearSolve}(T) = \begin{bmatrix} -t 2_3 \\ -2 - t 2_3 \\ -t 2_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen er:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (1, -2, 1, 0)$ , hvor  $t \in \mathbb{R}$

### Løsning med nulrummet

Superhurtigt - men virker **kun** på et **homogent** ligningssystem.

$$\text{NullSpace}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Dvs. løsningen er:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (1, -2, 1, 0)$ , hvor  $t \in \mathbb{R}$

## Ortogonalt komplement

Lad et underrum  $U$  i  $\mathbb{R}^4$  være givet ved 2 ligninger:

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Koefficientmatrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Bestemmes af $U$

Underrommet  $U$  bestemmes lettest ved:

$$N := \text{NullSpace}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$u_1 := N[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 := N[2] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs.  $U = \text{span}\{(-1, 0, 0, 1), (1, -2, 1, 0)\}$

## Bestemmelse af $U^\perp$

Det ortogonale komplement  $U^\perp$  bestemmes let ved at konstatere, at det er rækkerne fra  $A$ !

Dvs.  $U^\perp = \text{span}\{(1, 0, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$

Koefficientmatricen transponeres:

$$B := A^{\%T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 := B[1..4, 1..1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := B[1..4, 2..2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 := \text{convert}(v_1, \text{Vector}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \text{convert}(v_2, \text{Vector}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Tjek at $U \perp U^\perp$

Undersøger skalarproduktet af basisvektorerne:

$$\text{with}(\text{VektorAnalyse4}) = [\text{div}, \text{grad}, \text{kryds}, \text{prik}, \text{rot}, \text{vop}]$$

$$[\text{prik}(u_1, v_1), \text{prik}(u_1, v_2), \text{prik}(u_2, v_1), \text{prik}(u_2, v_2)] = [0, 0, 0, 0]$$

## Trappematrix og øvre trekantsmatrix

restart : with(LinearAlgebra) :

Givet en matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} :$$

Med *ReducedRowEchelonForm* kan man lave en **trappeformet matrix med initial-ettaller**:

$$\text{ReducedRowEchelonForm}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Med *GaussianElimination* kan man lave en **øvre trekantsmatrix**:

$$\text{GaussianElimination}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I visse komplicerede tilfælde må man nøjes med en øvre trekantsmatrix frem for en trappeformet.

De er fordi Maple ikke tjekker om der divideres med 0, når Maple laver rækkeoperationerne i det tilfælde, hvor der indgår variable/parametre!

**Revideret eksempel fra et 3-ugers projekt:**

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a & 0 \\ a^2 \cdot \sinh(b) & a^2 \cdot \cosh(b) & -a^2 \cdot \sin(b) & -a^2 \cdot \cos(b) \\ a^3 \cdot \cosh(b) & a^3 \cdot \sinh(b) & -a^3 \cdot \sin(b) & a^3 \cdot \sin(b) \end{bmatrix} :$$

$$\text{ReducedRowEchelonForm}(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det viser jo, at rangen af matricen  $M$  er 4.

Tjek:

$$\text{Rank}(M) = 4$$

$$\text{GaussianElimination}(M) =$$

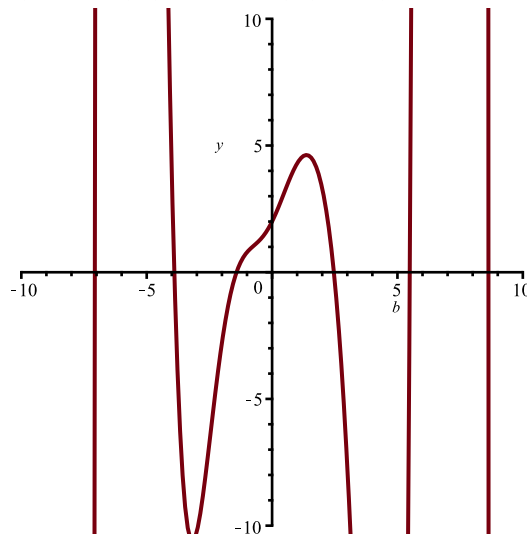
$$\left[ \begin{array}{l} \left[ a, 0, a, 0 \right], \\ \left[ 0, 1, 0, 1 \right], \\ \left[ 0, 0, -a^2 (\sin(b) + \sinh(b)), -a^2 (\cos(b) + \cosh(b)) \right], \\ \left[ 0, 0, 0, -\frac{a^3 (\cos(b)^2 - \sin(b) \cos(b) - \cosh(b) \cos(b) - \cosh(b) \sin(b) - 2)}{\sin(b) + \sinh(b)} \right] \end{array} \right]$$

Men der er faktisk 3 diagonal-elementer, som kan gå hen og blive 0!

Så rangen kan i hvert fald i flere tilfælde være 3, hvis parametrene  $a$  og  $b$  har de rette værdier.

For at undersøge det nærmere man tage parentesen, som står i tælleren af brøken på plads 4,4 i matricen. Og så tegne en graf, hvor man så ser 6 løsninger mellem -10 og 10!

`plot(sin(b) cos(b) + cosh(b) sin(b) - cos(b)2 + cosh(b) cos(b) + 2, b=-10..10, y=-10..10)`



Det kan være utrolig svært at finde disse løsninger ved ligningsløsning.

Hvis man vil beregne en tilnærmet værdi mellem 1 og 4, som tydeligvis eksisterer i følge grafen, så kan man bruge `fsolve` (den numeriske ligningsløser, hvor man kan angive et interval, hvor løsningen ligger).

NB: `fsolve` giver højst én løsning!

`fsolve(sin(b) cos(b) + cosh(b) sin(b) - cos(b)2 + cosh(b) cos(b) + 2 = 0, b = 1..4) = 2.464404117`