

Uge07 SD E21, opgave 4b A: Baser og koordinater (advanced)

e er monomie-basis (standardbasis), ofte betegnet med m .

a er basis bestående af P_1, P_2, P_3

v består her af 3 vektorer: Q_1, Q_2, Q_3

> restart

> with(LinearAlgebra) :

Q opskrevet i a -basis:

$$> aQ1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}; aQ2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; aQ3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$aQ1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aQ2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aQ3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> $aQ := \langle aQ1|aQ2|aQ3 \rangle$

$$aQ := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Q opskrevet i e -basis:

$$> eQ1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}; eQ2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; eQ3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$eQ1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$eQ2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$eQ3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$> eQ := \langle eQ1 | eQ2 | eQ3 \rangle$$

$$eQ := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(4)

Der gælder nu, at: $eMa \cdot aQ1 = eQ1$ og $eMa \cdot aQ2 = eQ2$ og $eMa \cdot aQ3 = eQ3$

Disse 3 ligninger kan omskrives til 1 ligning med matricer: $eMa \cdot aQ = eQ$
(hvor aQ og eQ er 3×3 matricer med de oprindelige vektorer som søjler).

Den ubekendte i matrix-ligningen er eMa !

Metode 1: Løser ligningen ved at gange med $(aQ)^{-1}$ fra højre på begge sider, og udfører matrixmultiplikation

$$\begin{aligned} eMa \cdot aQ = eQ & \quad (eMa \cdot aQ) \cdot (aQ)^{-1} = eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow \\ eMa \cdot (aQ \cdot (aQ)^{-1}) = eQ \cdot (aQ)^{-1} & \Leftrightarrow eMa \cdot E = eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow \\ eMa = eQ \cdot (aQ)^{-1} & \end{aligned}$$

$$> eQ \cdot (aQ)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(1.1)

Konklusion:
$$eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Metode 2: Omskriver ligningen med transponering, og bruger "LinearSolve"

Den ubekendte i ligningen $eMa \cdot aQ3 = eQ3$ er eMa . Dvs. man kan ikke umiddelbart anvende `LinearSolve(A,B)`-kommandoen.

`LinearSolve(A,B)` løser nemlig ligningen: $A \cdot X = B$. Man skal først have flyttet den ubekendte, så den står til højre i matrix-produktet.

Ligningen omskrives til formen " $A \cdot X = B$ " ved brug af transponering:

$$\begin{aligned} eMa \cdot aQ = eQ & \quad (eMa \cdot aQ)^T = (eQ)^T \Leftrightarrow \\ (aQ)^T \cdot (eMa)^T = (eQ)^T & \Leftrightarrow \\ (aQ)^T \cdot X = (eQ)^T & \quad \text{hvor } X = (eMa)^T \end{aligned}$$

Det betyder, at den søgte basisskiftmatrix eMa fås som X^T , når ligningen kan løses med "`LinearSolve(A, B)`", hvor $A = (aQ)^T$ og $B = (eQ)^T$

$$> (\text{LinearSolve}(aQ\%T, eQ\%T))\%T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(2.1)

Konklusion: $eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

Metode 3: Omskriver ligningen med invertering, og bruger "LinearSolve"

Den ubekendte i ligningen $eMa \cdot aQ^3 = eQ^3$ er eMa . Dvs. man kan ikke umiddelbart anvende `LinearSolve(A,B)`-kommandoen.

`LinearSolve(A,B)` løser nemlig ligningen: $A \cdot X = B$. Man skal først have flyttet den ubekendte, så den står til højre i matrix-produktet.

Ligningen omskrives til formen " $A \cdot X = B$ " ved brug af invertering:

$$eMa \cdot aQ = eQ \quad (eMa \cdot aQ)^{-1} = (eQ)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$(aQ)^{-1} \cdot (eMa)^{-1} = (eQ)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$(aQ)^{-1} \cdot X = (eQ)^{-1} \quad \text{hvor } X = (eMa)^{-1}$$

Det betyder, at den søgte basisskiftematrix eMa fås som X^{-1} , når ligningen kan løses med "`LinearSolve(A, B)`", hvor $A = (aQ)^{-1}$ og $B = (eQ)^{-1}$

$$> (\text{LinearSolve}((aQ)^{-1}, (eQ)^{-1}))^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(3.1)

Konklusion: $eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

P 'erne står nu som søjler udtrykt ved standard-basis (monomiske basis):

Konklusion: $P_1(x) = 1 + x^2$, $P_2(x) = -1 - x - 3 \cdot x^2$, $P_3(x) = 6 + x + 5 \cdot x^2$