Underrum? (udvidelse af opgave 5 D og E fra Uge 07 SD E21)

4 eksempler, som er gode at forstå i forbindelse med begrebet "**underrum**".

Alle 4 eksempler foregår i vektorrummet $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, **dvs. alle 2. grads polynomier med reelle koefficienter.**

a) Alle polynomier med rod i 1

UNDERRUM ✓

Da $x=1$ er en rod, kan et polynomium faktoriseres med nedstigningssætningen til $(x-1)\cdot(a\cdot x+b)$.

L1:
Givet $P_1(x)=(x-1)\cdot(a_1\cdot x+b_1)$ og $P_2(x)=(x-1)\cdot(a_2\cdot x+b_2)$.
Så er
$(P_1+P_2)(x)=P_1(x)+P_2(x)=(x-1)\cdot(a_1\cdot x+b_1)+(x-1)\cdot(a_2\cdot x+b_2)=(x-1)\cdot((a_1\cdot x+b_1)+(a_2\cdot x+b_2))=(x-1)\cdot((a_1+a_2)\cdot x+(b_1+b_2))$

Dvs. P_1+P_2 er af samme type.

L2:
Givet $P(x)=(x-1)\cdot(a\cdot x+b)$.
Så er $(k\cdot P)(x)=k\cdot P(x)=k\cdot((x-1)\cdot(a\cdot x+b))=(x-1)\cdot((k\cdot a)\cdot x+(k\cdot b))$
Dvs. $k\cdot P$ er af samme type.

Da L1 og L2 er opfyldt, vil mængden være et underrum i $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Dimension af underrummet? $\underline{\underline{2}}$, da der er 2 frie parametre, nemlig a og b.

b) Alle polynomier med rod

IKKE ET UNDERRUM

For at bevise, at mængden ikke er et underrum, skal man blot komme med et modeksempel.
Her på L1 (L2 vil fungere!).

Fidusen er, at man sørger for at tage 2 polynomier, hvor roden er placeret i forskellige tal!

Lad $P_1(x)=(x-1)^2$ og $P_2(x)=(x-2)^2$.
Så vil $(P_1+P_2)(x)=P_1(x)+P_2(x)=(x-1)^2+(x-2)^2$.
NB: $(x-1)^2\geq 0$ og $(x-2)^2\geq 0$, hvorfor $(x-1)^2+(x-2)^2\geq 0$.
Mere præcist er $(x-1)^2=0$ kun i $x=1$, mens $(x-2)^2=0$ kun i $x=2$. Derfor er $(x-1)^2+(x-2)^2>0$, og dermed aldrig 0.

Dvs. polynomium P_1+P_2 har ingen rødder! Derfor er mængden ikke et underrum af $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

c) Alle polynomier med dobbeltrod i 1

UNDERRUM ✓

Da $x = 1$ er en dobbeltrod, kan et polynomium faktoriseres med nedstigningssætningen til $a \cdot (x-1) \cdot (x-1) = a \cdot (x-1)^2$.

L1:
Givet $P_1(x) = a_1 \cdot (x-1)^2$ og $P_2(x) = a_2 \cdot (x-1)^2$.
Så er $\left(P_1 + P_2\right)(x) = P_1(x) + P_2(x) = a_1 \cdot (x-1)^2 + a_2 \cdot (x-1)^2 = \left(a_1 + a_2\right) \cdot (x-1)^2$
Dvs. $P_1 + P_2$ er af samme type.

L2:
Givet $P(x) = a \cdot (x-1)^2$.
Så er $\left(k \cdot P\right)(x) = k \cdot P(x) = k \cdot \left(a \cdot (x-1)^2\right) = (k \cdot a) \cdot (x-1)^2$
Dvs. $k \cdot P$ er af samme type.

Da L1 og L2 er opfyldt, vil mængden være et underrum i $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Dimension af underrummet? $\underline{\underline{1}}$, da der er 1 fri parameter, nemlig a.

d) Alle polynomier med dobbeltrod

IKKE ET UNDERRUM

Modeksemplet fra (b) kan genbruges!