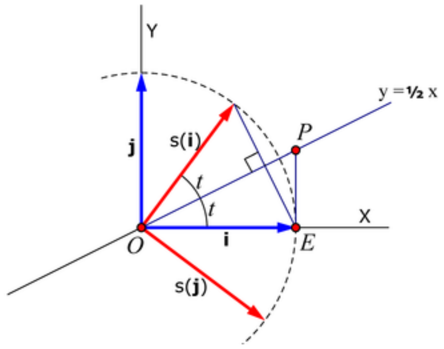
Uge 8, StoreDag, Opgave 6: Spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$

4 beviser!

Metode 1 (brug af trigonometriske formler for dobbelte vinkler)

Bestemmelse af afbildningsmatricen hørende til spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$



(figur 12.11 i eNote 12)

Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Derfor gælder, at $\tan(t) = \frac{1}{2}$

Anvender formler for $\sin(2 \cdot t)$ og $\cos(2 \cdot t)$:
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities#Double-angle.2C_triple-angle.2C_and_half-angle_formulae

Sine	Cosine
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

Dvs. $\cos(2 \cdot t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$

og $\sin(2 \cdot t) = \frac{2 \cdot \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

Så koordinaterne for $s(\boldsymbol{i}) = (\cos(2 \cdot t), \sin(2 \cdot t)) = \underline{\underline{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$

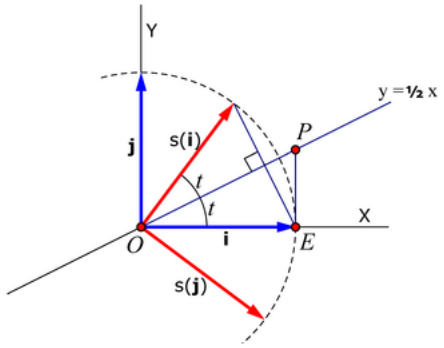
Da $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$ vil $s(\boldsymbol{i}) \perp s(\boldsymbol{j})$.

Mere præcist er $s(\boldsymbol{j}) = -tværvektor(s(\boldsymbol{i})) = -tværvektor\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}}$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne: $\begin{bmatrix} s(\boldsymbol{i})_x & s(\boldsymbol{j})_x \\ s(\boldsymbol{i})_y & s(\boldsymbol{j})_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}}$

Metode 2 (brug af drejninger)

Bestemmelse af afbildningsmatricen hørende til spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$



(figur 12.11 i eNote 12)

Anvender rotationsmatricen i $\mathbb{R}^2$, dvs. 2 dimensioner.
Lad t have samme betydning som ovenfor.

Afbildningen opbygges af 3 lineære afbildninger:

1) Først *drejes* vinklen $-t$ med uret. Nu ligger spejlingsaksen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ på selve x-aksen.

2) Så foretages en *spejling* i x-aksen.

3) Til sidst *drejes* vinklen t med uret. Dette er den inverse afbildning af nr. 1.

Rotationsmatricer findes let på Wikipedia:
http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Spejling i x-aksen: $\boldsymbol{i}$ går over i sig selv, og $\boldsymbol{j}$ går over i $-\boldsymbol{j}$.

Matricerne har så følgende værdi:

> *restart*

> $A1 := \begin{bmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix}$

$$A1 := \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1)}$$

> $A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2)}$$

> $A3 := A1^{-1}$

$$A3 := \begin{bmatrix} \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & -\frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

> $A3 := simplify(A3)$

$$A3 := \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

De 3 lineære afbildninger sættes sammen:

> $A := A3.\,A2.A1$

$$A := \begin{bmatrix} \cos(t)^2 - \sin(t)^2 & 2\cos(t)\sin(t) \\ 2\cos(t)\sin(t) & \sin(t)^2 - \cos(t)^2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

> $A := simplify(A)$

$$A := \begin{bmatrix} 2\cos(t)^2 - 1 & 2\cos(t)\sin(t) \\ 2\cos(t)\sin(t) & -2\cos(t)^2 + 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

NB: I følge formlerne for dobbelte vinkler ovenfor:

Sine	Cosine
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

er denne matrix A identisk med $\begin{bmatrix} \cos(2\cdot t) & \sin(2\cdot t) \\ \sin(2\cdot t) & -\cos(2\cdot t) \end{bmatrix}$

som jo netop har søjlevektorerne $s(\boldsymbol{i})$ og $-tværvektor(s(\boldsymbol{i}))$.

Linjen $y = \frac{1}{2}\cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Derfor gælder, at $\tan(t) = \frac{1}{2}$

Nu indsættes værdien af t :

> $t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$:

Og afbildningsmatricen kan bestemmes:

> A

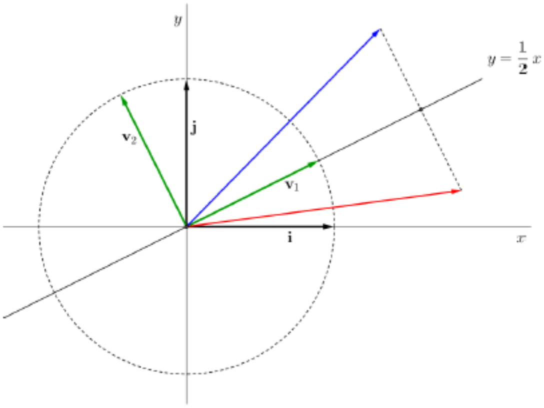
$$\begin{bmatrix} 2\cos(t)^2 - 1 & 2\cos(t)\sin(t) \\ 2\cos(t)\sin(t) & -2\cos(t)^2 + 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

> $simplify(A)$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne: $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Metode 3a (ved brug af basisskifte)



(figur fra opgave 6)

Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Vinklen t hørende til v_1 er givet ved $\tan(t) = \frac{1}{2}$, dvs. $t = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

> *restart*

> $t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right):$

> $v_1 := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

v_2 er givet ved tværvektoren til v_1.

> $v_2 := \begin{bmatrix} -v_1[2, 1] \\ v_1[1, 1] \end{bmatrix}$

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

eller blot:

> $v_2 := \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$

(3.3)

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Basisskiftematrix *eMv* :

> $eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle$

$$eMv := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

> $vMe := eMv^{-1}$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Afbildningsmatrix i basis (v_1, v_2) :

> $vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

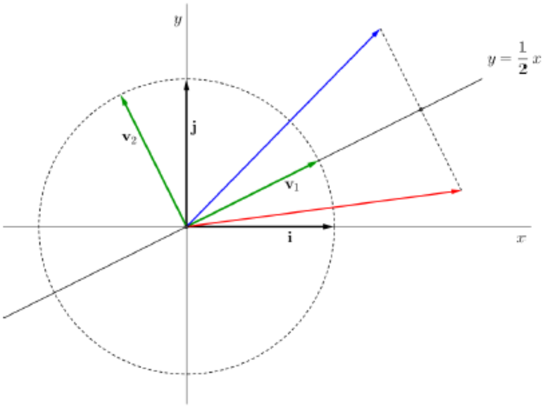
Afbildningsmatrix i basis (e_1, e_2) :

> $eFe := eMv.vFv.vMe$

$$eFe := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}}$

Metode 3b (ved brug af basisskifte)



(figur fra opgave 6)

Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Retningen er således givet ved vektoren: $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Enhedsvektoren i samme retningen har så koordinaterne:

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

Dette er faktisk vektor v_1!

> *restart*

> $v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1)}$$

v_2 er givet ved tværvektoren til v_1.

> $v_2 := \begin{bmatrix} -v_1[2] \\ v_1[1] \end{bmatrix}$

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.2)}$$

Basisskiftematrix *eMv* :

> $eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle$

$$eMv := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

> $vMe := eMv^{-1}$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Afbildningsmatrix i basis (v_1, v_2):

> $vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Afbildningsmatrix i basis (e_1, e_2):

> $eFe := eMv.vFv.vMe$

$$eFe := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}}$