Uge 10, SD, opgave 5 - udvidet for bedre forståelse!

Opg 5: *Egenværdier i funktionsrum*

Betragt den lineære afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ givet ved

$$f(x(t)) = x'(t) - x(t) .$$

Lad U betegne det underrum i $C^\infty(\mathbb{R})$ som har basis $v = (e^{-t}, 1, e^t, e^{2t})$.

restart
with(*LinearAlgebra*) :

$f(x) := diff(x, t) - x :$

Bemærk, hvordan man skal definere funktionen!

c)

C Vis at billedmængden $f(U)$ er et underrum i U, og bestem afbildningsmatricen ${}_v\mathbf{F}_v$ for afbildningen $f : U \to U$ med hensyn til basis v.

$f\sim([e^{-t}, 1, e^t, e^{2\cdot t}]) = [-2\,e^{-t}, -1, 0, e^{2\,t}]$

NB: tilde-tegnet ~ anvendes til at få funktionen anvendt på alle 4 elementer i listen!

Dvs. billedrummet: $f(U) = span\{e^{-t}, 1, e^{2\cdot t}\}$
Derfor vil $f(U) \subseteq U$.
Og $f(U)$ har dimension 3, mens U har dimension 4.

Afbildningsmatricen i basis v:

$$vFv := DiagonalMatrix(\langle -2, -1, 0, 1\rangle) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

D Bestem koordinatvektoren for

$$q(t) = -6e^{-t} + e^{2t} + 2$$

med hensyn til basis v, og find ved hjælp af den i forrige spørgsmål fundne afbildningsmatrix samtlige løsninger i U til ligningen

$$f(x(t)) = q(t) .$$

Højresiden $q(t)$ kan udtrykkes i v-basis som:

$$q := \langle -6, 2, 0, 1\rangle = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Differentialligningen kan løses i U :

$$LinearSolve(vFv, q) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ \_t_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen i U er: $\underline{\underline{\langle 3, -2, 0, 1\rangle + c \cdot \langle 0, 0, 1, 0\rangle}}$ eller $\underline{\underline{\boldsymbol{x(t) = 3 \cdot e^{-t} - 2 + e^{2 \cdot t} + c \cdot e^{t}}}}$ hvor $c \in \mathbb{R}$.

Der er altså uendelig mange løsninger.
Altså en partikulær løsning til det inhomogene system + den fuldstændige løsning til det homogen system.

e)

E

Sammenlign resultatet i foregående spørgsmål med det som Maple's `dsolve` angiver. Hvorfor er der ikke i $C^{\infty}(\mathbb{R})$ flere løsninger til ligningen

$$f(x(t)) = q(t)$$

end der er i underrummet U?

$dsolve\left(x'(t) - x(t) = -6 \cdot e^{-t} + e^{2 \cdot t} + 2\right) = x(t) = e^{2t} + 3\, e^{-t} - 2 + e^{t}\, \_C1$
eller:
$dsolve\left(f(x(t)) = -6 \cdot e^{-t} + e^{2 \cdot t} + 2\right) = x(t) = e^{2t} + 3\, e^{-t} - 2 + e^{t}\, \_C1$

Samme løsning som i d).

Det giver samme løsning i c) og d) , da den partikulære løsning samt den homogene løsning alle $\in U$!

EXTRA 1

Antag nu, at basen $e^{t} \notin U$. Dvs. $U = span\{e^{-t}, 1, e^{2 \cdot t}\}$.

c)

Afbildningsmatricen bliver så (idet 3. søjle fjernes):

$$vFv1 := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

d)

$$LinearSolve(vFv1, q) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen i U er: $\underline{\underline{\langle 3, -2, 1\rangle}}$ eller $\underline{\underline{\boldsymbol{x(t) = 3 \cdot e^{-t} - 2 + e^{2 \cdot t}}}}$

Der er altså kun én løsning i U.

e)

Maples dsolve giver naturligvis samme løsning som før.
$dsolve\left(f(x(t)) = -6 \cdot e^{-t} + e^{2 \cdot t} + 2\right) = x(t) = e^{2t} + 3\, e^{-t} - 2 + e^{t}\, \_C1$

Nu giver c) og d) <u>ikke</u> samme løsning!
Årsag: den homogene løsning ligger ikke i U.

EXTRA 2

Antag igen, at $U = span\{e^{-t}, 1, e^{t}, e^{2 \cdot t}\}$.
Antag også, at højresiden nu hedder e^{t}.
$q2 := \langle 0, 0, 1, 0 \rangle$:

c)

$LinearSolve(vFv, q2)$

```
Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

Dvs. der er ingen løsning nu, fordi $e^{t} \notin f(U)$!
Der er altså ingen partikulær løsning i U.

d)

$dsolve\left(f(x(t)) = e^{t}\right) = x(t) = (t + \_C1)\, e^{t}$

Dvs. løsningen i $C^{\infty}(\mathbb{R})$ er $\boldsymbol{\underline{\underline{x(t) = (t + c) \cdot e^{t}}}}$ hvor $c \in R$.

Nu giver c) og d) <u>ikke</u> samme løsning!