# Den komplekse gættemetode

***2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter***
***eNote 18 afsnit 18.3.3, sætning 18.17, metode 18.18, eksempel 18.19***

**Differentialligning:** $x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t)$

**Højresiden kan skrives:**
$19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\mathrm{Re}(e^{i\cdot t}) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\mathrm{Im}(e^{i\cdot t}) = 19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) - 35\cdot\mathrm{Im}(e^{(4+i)\cdot t}) =$
$19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) + 35\cdot\mathrm{Re}(i\cdot e^{(4+i)\cdot t}) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

dvs. $19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

***Bemærk fortegnsskiftet foran 35!***

**Gæt:** $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(c\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ hvor $c \in \mathbb{C}$

**NB: eNoten opererer med et mere besværligt udtryk:**
$xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}((c+id)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ **hvor** $c, d \in \mathbb{R}$

**Jeg foretrækker en kompleks konstant c.**
**Så skal man kun løse én kompleks ligning frem for 2 relle ligninger.**

## Simuleret håndregning

*restart*

### **Reel** differentialligning:

$DiffLignR := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) =$
$D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = 19\,e^{4t}\cos(t) - 35\,e^{4t}\sin(t)$

### **Kompleks** differentialligning:

$DiffLignC := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (19 + I\cdot 35)\cdot e^{(4+I)\cdot t} =$
$D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t}$

Gættede løsning, hvor $c$ er et **komplekst** tal:
$xGÆT(t) := c\cdot e^{(4+I)\cdot t}$:
$xGÆT(t) = c\,e^{(4+I)\,t}$

Indsættes i den **komplekse** differentialligning.:
$subs(x = xGÆT, DiffLignC) = D^{(2)}(xGÆT)(t) - 2\,D(xGÆT)(t) - 2\,xGÆT(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t}$
$simplify(\%) = (5 + 6\,I)\,c\,e^{(4+I)\,t} = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t}$

I denne ligning kan eksponential-funktionen forkortes væk, og ligningen kan løses mht. $c$.
Faktisk må $c = \dfrac{19 + 35\cdot i}{5 + 6\cdot i}$, men det overlader jeg til Maple at reducere til $c = 5 + i$:
$c := solve(\%, c) = 5 + I$

Den **komplekse** løsning er altså:
$xGÆT(t) = (5 + I)\,e^{(4+I)\,t}$

Den **reelle** løsning er så **real-delen** af $xGÆT$:

$\mathrm{Re}(xGÆT(t)) = \Re\left((5+\mathrm{I})\,e^{(4+\mathrm{I})\,t}\right)$

$LØSNING := evalc(\%) = 5\,e^{4t}\cos(t) - e^{4t}\sin(t)$

Den partikulære løsning er således: $5\,e^{4t}\cos(t) - e^{4t}\sin(t) = e^{4\cdot t}\cdot(5\cdot\cos(t) - \sin(t))$

## Maple-tjek

$xPARTIKULÆR := unapply(LØSNING, t):$

$xPARTIKULÆR(t) = 5\,e^{4t}\cos(t) - e^{4t}\sin(t)$

Indsætter den partikulære løsning i den **reelle** differentialligning:

$subs(x = xPARTIKULÆR, DiffLignR) =$

$D^{(2)}(xPARTIKULÆR)(t) - 2\,D(xPARTIKULÆR)(t) - 2\,xPARTIKULÆR(t) = 19\,e^{4t}\cos(t) - 35\,e^{4t}\sin(t)$

$simplify(\%) = e^{4t}(19\cos(t) - 35\sin(t)) = e^{4t}(19\cos(t) - 35\sin(t))$

**Stemmer!**

## Generel metode

Hvis højre siden er = $a\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t) - b\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$

kan den skrives på kompleks form som = $\mathrm{Re}\left((a + b\cdot i)\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}\right)$

Så anvendes som gæt denne funktion $xGÆT(t) = c\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$

som indsættes som $x(t)$ i den **komplekse udgave af differentialligningen**:

$x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (a + b\cdot i)\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$

Når $c$ er fundet, så er den partikulære løsning givet ved: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(xGÆT(t))$

## Løsningen på formen $A\cdot\cos(\omega\cdot t + \theta)$ hvis $\alpha = 0$

Hvis $\alpha = 0$ vil løsningen vil så være en ren kombination af sin og cos, dvs. eksponentialleddet vil mangle.

Man kan så omskrive løsningen til formen $A\cdot\cos(\omega\cdot t + \theta)$ ved at anvende denne beskrivelse:
https://steen-toft.dk/mat/dtu/20152016/tema/amplitud.pdf

**Men man kan slippe lettere om ved det!**

Hvis $\alpha = 0$ så bliver løsningen på formen $c\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$.

$c$ kan omskrives til $|c|\cdot e^{i\cdot\theta}$, hvor $|c|$ er modulus af $c$ og $\theta$ er agumentet til $c$.

Derfor kan den **komplekse løsning** skrives $c\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = |c|\cdot e^{i\cdot\theta}\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = |c|\cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t+\theta)}$.

Den **reelle løsning** fås så som realdelen, dvs. $\mathrm{Re}\left(|c|\cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t+\theta)}\right) = |c|\cdot\cos(\omega\cdot t + \theta) = |c|\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega\cdot t} + \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{c}))$ .

Dvs. løsningen kan skrives på formen: $|c|\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega\cdot t} + \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{c}))$