

# Anvendelse af tangentielt kurveintegral: **Gravitation**

Praktisk anvendelse i fysik af eNote, som omhandler *tangentielle kurveintegraler*.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s\\_law\\_of\\_universal\\_gravitation](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_universal_gravitation)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\\_field](http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_field)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\\_potential](http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_potential)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Potential\\_energy](http://en.wikipedia.org/wiki/Potential_energy)

Gravitationskraften er givet ved:  $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$  (skalarform) og  $\vec{F}_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r}$  (vektorform)

hvor  $r$  er afstanden fra f.eks. en planet med massen  $M$ , og  $m$  er massen af legemet, som påvirkes af planetens massetiltrækning.

Gravitationskraften giver anledning til begrebet **potentiell energi**:  $E_{pot} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

NB: Den potentielle energi er negativ, og nærmer sig 0 uendelig langt væk.

> restart

> with(VektorAnalyse4)

[div, grad, kryds, prik, rot, vop]

(1)

$\vec{F}_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r}$  implementeres:

>  $F_{grav} := (x, y, z) \rightarrow -G \cdot \frac{M \cdot m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \cdot \langle x, y, z \rangle : F_{grav}(x, y, z)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{GMm x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMm y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMm z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

(2)

**Kraftens arbejde** beregnes som det *tangentielle kurveintegral* fra punktet  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  til uendelig, idet nulpunktet for den potentielle energi placeres i uendelig.

Her anvendes sætning 25.2:

### ||| Sætning 25.2

Det tangentielle kurveintegral af  $\mathbf{V}(x, y, z)$  langs  $K_r$  kan beregnes således:

$$\text{Tan}(\mathbf{V}, K_r) = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) \, du \quad . \quad (25-7)$$

Parametrisering, hvor  $u \in [1, \infty[$  (NB: når  $u = 1$  er man i  $P_0$ ):

>  $R := u \rightarrow \langle x_0 \cdot u, y_0 \cdot u, z_0 \cdot u \rangle : R(u)$

$$\begin{bmatrix} x_0 u \\ y_0 u \\ z_0 u \end{bmatrix} \quad (3)$$

>  $\text{diff}(R(u), u)$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

>  $F_{\text{grav}}(\text{vop}(R(u)))$

$$\begin{bmatrix} -\frac{GMm x_0 u}{(x_0^2 u^2 + y_0^2 u^2 + z_0^2 u^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMm y_0 u}{(x_0^2 u^2 + y_0^2 u^2 + z_0^2 u^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMm z_0 u}{(x_0^2 u^2 + y_0^2 u^2 + z_0^2 u^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

>  $\text{prik}((4), (5))$

$$-\frac{x_0^2 GMm u}{(x_0^2 u^2 + y_0^2 u^2 + z_0^2 u^2)^{3/2}} - \frac{y_0^2 GMm u}{(x_0^2 u^2 + y_0^2 u^2 + z_0^2 u^2)^{3/2}} - \frac{z_0^2 GMm u}{(x_0^2 u^2 + y_0^2 u^2 + z_0^2 u^2)^{3/2}} \quad (6)$$

>  $\text{simplify}((6))$  assuming  $u > 0$

$$-\frac{GMm}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} u^2} \quad (7)$$

>  $A := \int_1^{\infty} (7) \, du$

$$A := -\frac{GMm}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \quad (8)$$

**Gravitationskraftens arbejde** er altså givet ved:  $A = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$ , hvor  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$  er afstanden fra origo til punktet  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ .

Dette arbejde kaldes den potentielle energi:  $E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

Den potentielle energi  $E_{pot}$  er en skalarfunktion, og gradientfeltet af  $-E_{pot}$  er gravitationskraften  $\vec{F}_{grav}$

$$\begin{aligned} > E_{pot} := (x, y, z) \rightarrow -G \cdot \frac{M \cdot m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} : E_{pot}(x, y, z) \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > \text{grad}(-E_{pot}(x, y, z), [x, y, z]) \\ & \qquad \qquad \qquad \left[ \begin{array}{c} -\frac{GMmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMmy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMmz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} > (2) - (10) \\ & \qquad \qquad \qquad \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Formel (10) er altså præcis formel (2), så svaret bliver altså:

$$\text{Gradienten af } -E_{pot} = \nabla(-E_{pot}) = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} = \vec{F}_{grav}$$

Fordi gravitationskraften er et gradientvektorfelt, så bliver kraftens arbejde (det tangentielle kurveintegral) uafhængig af vejen.

Det betyder, at arbejdet langs en lukket kurve er 0.

Kraften kaldes så **konservativ**.

**Det er kun for konservative kraftfelter, at begrebet potentiel energi giver mening!**

**Andre konservative kræfter er:** den elektriske kraft fra en punktladning (givet ved Coulombs lov) og fjederkraften (givet ved Hookes lov).

[http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s\\_law](http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_law)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s\\_law](http://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law)

**Ikke-konservative kræfter er:** gnidning og luftmodstand. Her er arbejdet altid *negativt* uanset vejen!

<http://en.wikipedia.org/wiki/Friction>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_\(physics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics))

Gravitationskraftens arbejde fra punkt  $P_1$  til punkt  $P_2$  er givet ved:

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^{P_2} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} - \int_{P_2}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = -\Delta E_{pot} \\
 &= \Delta(-E_{pot})
 \end{aligned}$$

**Gravitationskraftens arbejde kan altså udregnes alene som minus forskellen i potentiel energi.**

Dette er i overensstemmelse med sætning 25.10:

||| **Sætning 25.10** Tangentielt kurveintegral af et gradientvektorfelt

Lad  $f(x, y, z)$  betegne en funktion af de tre variable i rummet, og lad  $V(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$  betegne gradientvektorfeltet for  $f(x, y, z)$ . Lad  $K_r$  være en glat parametriseret kurve fra et punkt  $p$  til et punkt  $q$  i rummet. Det tangentielle kurveintegral af  $\nabla f(x, y, z)$  langs  $K_r$  afhænger kun af  $p$  og  $q$  og er uafhængig af kurven:

$$\int_{K_r} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(q) - f(p) \quad . \quad (25-24)$$