Integraler, parameterfremstillinger og Jacobi-funktion

Udklip fra eNote 24, 25 og 27. **Suppleret med bedre formler!**

Kurve i $\mathbb{R}^3$ eller i $\mathbb{R}^2$

Parametrisering, hvor $a \le u \le b$:

$$\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$$

NB: 3. koordinaten mangler blot, når kurven ligger i $\mathbb{R}^2$.

Jacobi-funktionen:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)|$$

Kurveintegralet:

$$\int_{K_{\mathbf{r}}} f\,d\mu = \int_a^b f(\mathbf{r}(u))\,\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)\,du$$

Hvis $f = 1$ er der tale om **længden** af kurven.

Det tangentielle kurveintegral af et vektorfelt $V(x, y, z)$:

$$\text{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u)\,du$$

Plant område i $\mathbb{R}^2$

Parametrisering, hvor $a \le u \le b$ og $c \le v \le d$:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Jacobi-funktionen:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v)| \cdot |\mathbf{r}'_v(u, v)| \cdot \sin(\theta(u, v))$$

Bedre formel: den numeriske værdi af determinanten af 2x2 matricen givet ved *VectorCalculus [Jacobian]* anvendt på r :

$$\text{Jacobi}_{\text{r}}(\text{u}, \text{v}) = \left|\text{determinanten}\left(\mathbf{r}'_{\text{u}}(\text{u}, \text{v}), \boldsymbol{r}'_{\text{v}}(\text{u}, \text{v})\right)\right|$$

Planintegralet:

$$\int_{P_{\mathbf{r}}} f\,d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v))\,\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)\,du\,dv$$

Hvis $f = 1$ er der tale om **arealet** af det plane område.

Flade i $\mathbb{R}^3$

Parametrisering, hvor $a \le u \le b$ og $c \le v \le d$:

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Jacobi-funktionen:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v) = |\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)|$$

Fladeintegralet:

$$\int_{F_{\mathbf{r}}} f\, d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u,v))\, \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v)\, du\, dv$$

Hvis $f = 1$ er der tale om **arealet** af fladen.

Rumligt område i $\mathbb{R}^3$

Parametrisering, hvor $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ og $h \le w \le l$:

$$\mathbf{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

Jacobi-funktionen:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v,w) = |\left(\mathbf{r}'_u(u,v,w) \times \mathbf{r}'_v(u,v,w)\right) \cdot \mathbf{r}'_w(u,v,w)|$$

Bedre formel: den numeriske værdi af determinanten af 3x3 matricen givet ved *VectorCalculus [Jacobian]* anvendt på r :

$$\text{Jacobi}_{\text{r}}(\text{u, v, w}) = \left|\text{determinanten}\left(\mathbf{r}'_{\text{u}}(\text{u, v, w}), \boldsymbol{r}'_{\text{v}}(\text{u, v, w}), \boldsymbol{r}'_{\text{w}}(\text{u, v, w})\right)\right|$$

Rumintegralet:

$$\int_{\Omega_{\mathbf{r}}} f\, d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u,v,w))\, \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v,w)\, du\, dv\, dw$$

Hvis $f = 1$ er der tale om **rumfanget** af området.

Flux ud gennem overfladen af et rumligt område

Parametrisering af overfladen F_r , hvor $a \le u \le b$, $c \le v \le d$:

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Her anvendes IKKE en Jacobi-funktion!

Fluxen af vektorfeltet V ud gennem fladen F_r:

$$\begin{aligned}\mathrm{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v))\, du\, dv \\ &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{N}_F(u,v)\, du\, dv \quad .\end{aligned}$$

NB: Normalvektoren N_F skal pege udad fladen.