

Omskrivning af en kvadratisk form i 2 variable

Eksemplet er en uddybning af Eksempel 22.1 i eNote nr. 22

NB: Når du kører Maple-filen med !!! vil der ske det, at resultatet i ligning 7 kan komme ud på forskellige måde.

Det kan betyde, at de 2 egenverdier er ombyttet, og egenvektorerne har modsatte koordinater!

> restart

Transponering af matrix kan laves som potensopløftning med eksponenten %T, så ligner det den matematiske skrivemåde, blot med % foran T.

$$\begin{aligned} > f(x, y) := 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 \\ & \quad f := (x, y) \mapsto 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot y \cdot x - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} > \text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](\langle f(x, y) \rangle, [x, y]) \\ & \quad \left[4x + 2y - 8 \quad 2x + 4y - 10 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} > \text{VectorCalculus}[\text{Hessian}](f(x, y), [x, y]) \\ & \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} > H := \frac{1}{2} \cdot \% \\ & \quad H := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Den kvadratiske form kan så skrives:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

Formlen kontrolleres:

$$\begin{aligned} > \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13 \\ & \quad (2x + y)x + (x + 2y)y - 8x - 10y + 13 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} > \text{expand}(\%) \\ & \quad 2x^2 + 2yx + 2y^2 - 8x - 10y + 13 \end{aligned} \quad (6)$$

Hvilket præcist er den givne kvadratiske form f .

Nu skal H diagonaliseres:

$$\begin{aligned} > \text{LinearAlgebra}[\text{Eigenvectors}](H, \text{output}=\text{'list'}) \\ & \quad \left[\left[3, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[1, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Egenværdierne pilles ud:

$$\text{> } e1 := (7)[1, 1]$$

$$e1 := 3 \quad (8)$$

$$\text{> } e2 := (7)[2, 1]$$

$$e2 := 1 \quad (9)$$

Egenvektorerne pilles ud:

$$\text{> } v1 := (7)[1, 3, 1]$$

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{> } v2 := (7)[2, 3, 1]$$

$$v2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ombyt evt. så egenværdierne er i voksende rækkefølge:

$$\text{> } \mathbf{if } e1 > e2 \mathbf{ then } e3 := e1; e1 := e2; e2 := e3; v3 := v1; v1 := v2; v2 := v3 \mathbf{ end if:}$$

Egenrummene står vinkelret på hinanden i følge teorien. Så egenvektorerne skal blot normeres til længde 1:

$$\text{> } v1 := \text{LinearAlgebra}[\text{Normalize}](v1, 2)$$

$$v1 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{> } v2 := \text{LinearAlgebra}[\text{Normalize}](v2, 2)$$

$$v2 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ortogonale substitutionsmatrix:

$$\text{> } Q := \langle v1|v2 \rangle$$

$$Q := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Hvis determinanten er -1, ombyttes søjlerne i Q (og egenvektorerne ombyttes):

$$\text{> } \text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](Q)$$

$$-1 \quad (15)$$

$$\text{> } \mathbf{if } \text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](Q) = -1 \mathbf{ then } Q := \langle v2|v1 \rangle \mathbf{ end if:}$$

$$\text{> } \text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](Q)$$

$$1 \quad (16)$$

Som forventet giver $Q^T \cdot H \cdot Q$ diagonalmatricen Λ :

$$\rightarrow Q^{\%T} \cdot H \cdot Q$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(17)

▶ Håndregning for at bestemme typen af den kvadratiske form

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x_1, y_1)

I formlen $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$ skal $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ erstattes af $Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right)^T \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot (Q^T \cdot H \cdot Q) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$

Altså er vi sluppet af med det blandede 2. grads led, som hedder $2 \cdot x \cdot y$

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$

$$3 \cdot (x_1^2 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1) + (y_1^2 - \sqrt{2} \cdot y_1) + 13 =$$

$$3 \cdot \left(\left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 \right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 \right) + 13 =$$

$$3 \cdot \left(\left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) + 13 =$$

$$3 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{27}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{1}{2} + 13 =$$

$$3 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - 1 =$$

$$\left(\frac{x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{1} \right)^2 - 1$$

Dvs. $f(x, y) = 0$ er en ellipse med halvakslerne $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1.

Ved brug af Maple (delvis håndregning)

I den kvadratiske form: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

erstattes de gamle koordinater (x, y) med nye koordinater (x_1, y_1) : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} &> \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right)^T \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) + 13 = 0 \\ &\left(\frac{3\sqrt{2}x_1}{2} - \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}x_1}{2} - \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right) + \left(\frac{3\sqrt{2}x_1}{2} + \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}x_1}{2} + \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right) \quad (2.1) \\ &\quad - 9\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 + 13 = 0 \end{aligned}$$

> `simplify(%)`

$$(-9x_1 - y_1)\sqrt{2} + 3x_1^2 + y_1^2 + 13 = 0 \quad (2.2)$$

> `Student[Precalculus][CompleteSquare](%)`

$$\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(x_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 = 0 \quad (2.3)$$

Beregnet effektivt med Maple

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x_1, y_1) :

$$XY := Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}x_1}{2} - \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}x_1}{2} + \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \end{bmatrix}$$

Her lader man Maple lave arbejdet.

Indsætter i den oprindelige kvadratiske form uden at skulle skrive selv.

`subs(x=XY[1], y=XY[2], f(x, y) = 0) =`

$$\begin{aligned} &2 \left(\frac{\sqrt{2}x_1}{2} - \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}x_1}{2} + \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}x_1}{2} - \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{2}x_1}{2} + \frac{\sqrt{2}y_1}{2} \right)^2 \\ &\quad - 9\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 + 13 = 0 \end{aligned}$$

`expand(%) = 3x_1^2 + y_1^2 - 9\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 + 13 = 0`

$$\text{Student[Precalculus][CompleteSquare]}(\%, [x_1, y_1]) = \left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(x_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

Ellipsens centrum er $C_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)$ i de nye koordinater!

I gamle koordinater ligger centrum i punktet $C = (1, 2)$:

$$> C := Q. \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

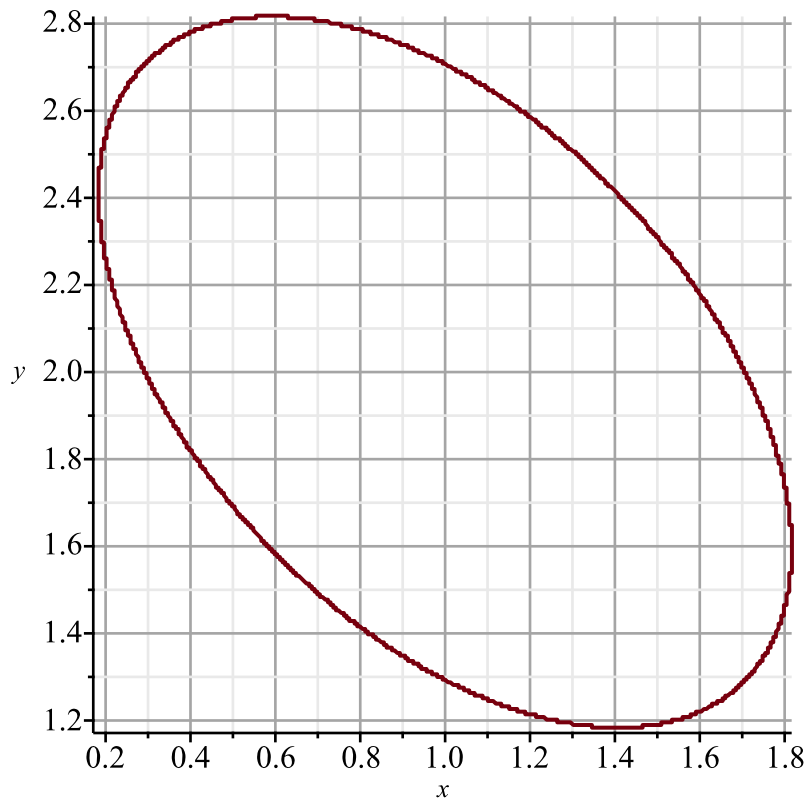
$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(18)

Ellipsen plottes:

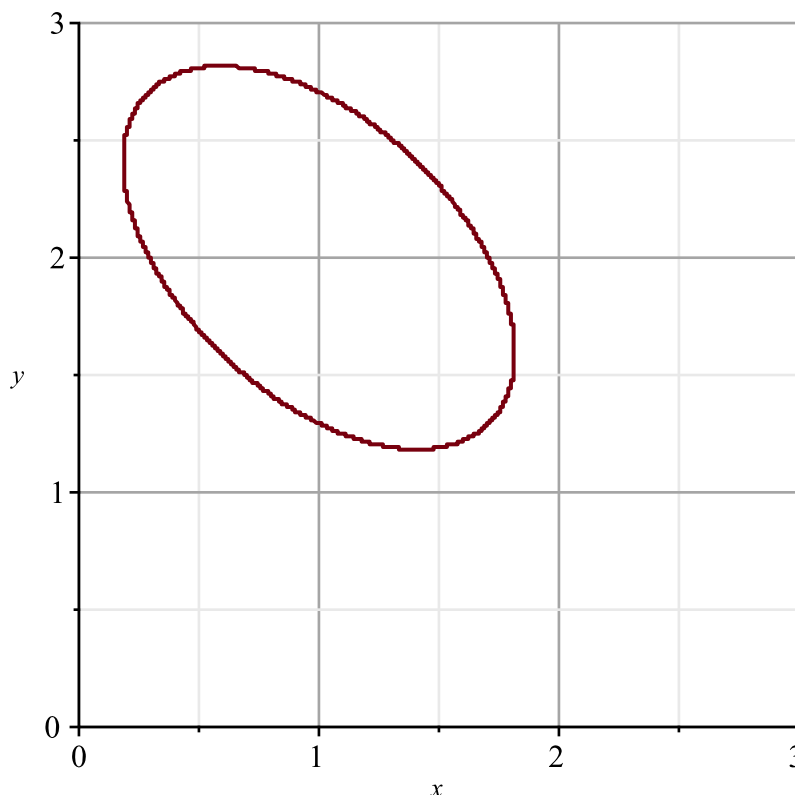
> *with(plots)* :

> *implicitplot*($2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 = 0$, $x=0 \dots 2$, $y=1 \dots 3$, *numpoints* = 100000, *gridlines*)



Origo bør ses på plottet:

> *implicitplot*($2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 = 0$, $x=0 \dots 2$, $y=1 \dots 3$, *numpoints* = 100000, *view* = [0 ..3, 0 ..3], *gridlines*)



Centrum ligger i $C = (1, 2)$.

Halvakserne går gennem centrum, og følger de nye koordinataksler!

Længden af halvakserne er fundet ovenfor som $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1. Husk at egenvektorerne er enshedsvektorer!

Halvakserne tegnes med en parameterfremstilling for et ret linjestykke.

Ellipsen tegnes med centrum, halvakser og egenvektorer:

$$> h1 := \frac{\sqrt{3}}{3} : h2 := 1 :$$

$$> v1 := \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle : v2 := \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle :$$

$$> C := \langle 1, 2 \rangle :$$

> *with(plots) :*

```
ellipse := implicitplot(2·x2 + 2·y2 + 2·x·y - 8·x - 10·y + 13 = 0, x = 0 .. 2, y = 1 .. 3, numpoints = 100000, color = red) :
```

```
centrum := pointplot([C], symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = black) :
```

```
akse1 := plot([(C + t·v1)[1], (C + t·v1)[2], t = -h1 .. h1], color = blue) :
```

```
akse2 := plot([(C + t·v2)[1], (C + t·v2)[2], t = -h2 .. h2], color = green) :
```

```
display(ellipse, centrum, akse1, akse2, view = [0 .. 3, 0 .. 3], gridlines)
```

