Eksempel på funktion af 2 variable, som har egentligt lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo, men som ikke har lokalt minimum i origo!

Eksemplet er hentet fra side 122 i bogen "Counterexamples in Analysis":

http://books.google.com/books?id=cDAMh5n4lkkC&printsec=frontcover&hl=da&source=gbs_navlinks_s#v=onepage&q=&f=false

https://www.bookdepository.com/Counterexamples-Analysis-Bernard-R-Gelbaum/9780486428758?ref=grid-view&qid=1580991581803&sr=1-1

13. A differentiable function of two variables possessing no extremum at the origin but for which the restriction to an arbitrary line through the origin has a strict relative minimum there.

The function

$$f(x, y) \equiv (y - x^2)(y - 3x^2)$$

has no relative extremum at the origin since there are points of the form $(0, b)$ arbitrarily near the origin at which f is positive, and also points of the form $(a, 2a^2)$ arbitrarily near the origin at which f is negative. If the domain of f is restricted to the x axis, the restricted function $3x^4$ has a strict absolute minimum at $x = 0$. If the domain of f is restricted to the y axis, the restricted function y^2 has a strict absolute minimum at $y = 0$. If the domain of f is restricted to the line $y = mx$ through the origin where $0 < |m| < +\infty$, the restricted function of the parameter x:

$$g(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$$

has a strict relative minimum at the origin since $g'(0) = 0$ and $g''(0) = 2m^2 > 0$.

> $restart$

> $with(plots):$

> $f(x, y) := (y - x^2) \cdot (y - 3 \cdot x^2):$

> $expand(f(x, y))$

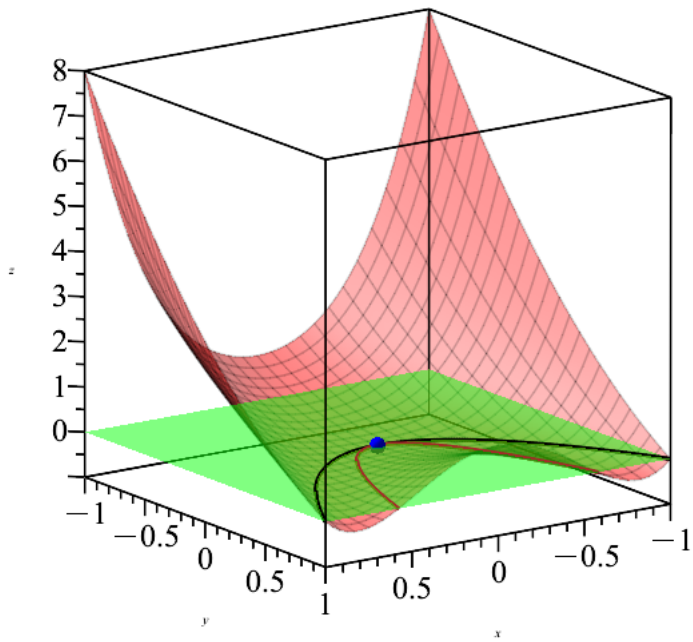
$$3x^4 - 4x^2y + y^2 \tag{1}$$

Ikke lokalt minimum i origo

Grafisk illustration

> $graf := plot3d(f(x, y), x = -1..1, y = -1..1, axes = boxed, labels = [x, y, z], color = red, transparency = 0.5):$
$gulv := implicitplot3d(z = 0, x = -1..1, y = -1..1, z = -1..1, color = green, transparency = 0.5, style = patchnogrid):$
$parabel1 := spacecurve(\langle t, t^2, 0\rangle, t = -1..1, color = black, thickness = 3):$
$parabel2 := spacecurve\left(\langle t, 3 \cdot t^2, 0\rangle, t = -\frac{1}{\sqrt{3}}..\frac{1}{\sqrt{3}}, color = brown, thickness = 3\right):$

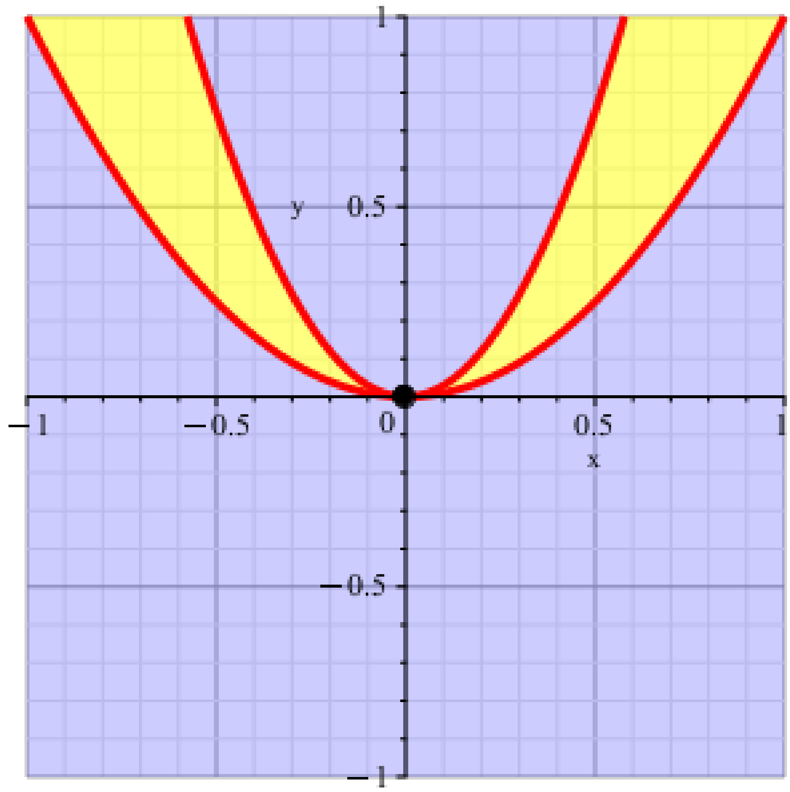
$origo3 := pointplot3d([0, 0, 0], color = blue, symbol = solidsphere, symbolsize = 20) :$
$display(graf, gulv, parabel1, parabel2, origo3)$



Grafisk ses det tydeligt, når man drejer på figuren, at der IKKE er lokalt minimum i origo!

På de 2 parabler er funktionen 0, mens den er negativ mellem de 2 parabler. Ellers er funktionen positiv.

> $positiv := inequal(\{f(x, y) > 0\}, x = -1 ..1, y = -1 ..1, color = blue, transparency = 0.8) :$
$negativ := inequal(\{f(x, y) < 0\}, x = -1 ..1, y = -1 ..1, color = yellow, transparency = 0.5) :$
$nul := implicitplot(f(x, y) = 0, x = -1 ..1, y = -1 ..1, color = red, thickness = 3, numpoints = 10000) :$
$origo2 := pointplot([0, 0], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 20) :$
$display(positiv, negativ, nul, origo2, gridlines)$



Funktionen er negativ mellem de 2 parabler, og positiv udenfor. Derfor er der IKKE et lokalt

minimum i origo.

NB: Funktionen er defineret som dette produkt: $f(x,y) = (y - x^2) \cdot (y - 3 \cdot x^2)$
Dermed ser man straks, at i mellem de 2 parabler med ligningerne $y = x^2$ hhv. $y = 3 \cdot x^2$, er 1. faktor negativ og 2. faktor positiv. Derfor er f negativ i området mellem de 2 parabler.
Overover begge parabler er begge faktorer positive, derfor er f positiv i det område.
Nedenunder begge parabler er begge faktorer negative, derfor er f positiv i det område.

Matematisk bevis

For at bevise det, ser man på 2 måder at nærme sig origo.
Dels på en parabel $y = 2 \cdot x^2$, som ligger imellem de 2 tegnede, dels på den rette linje $y = 0$.

> $g(x) := f(x, 2 \cdot x^2)$:

> $g(x)$

$$-x^4 \tag{1.2.1}$$

Det er tydeligt, at funktionen er **negativ** på hele parablen $y = 2 \cdot x^2$ pånær i origo, hvor funktionen er 0.

> $h(x) := f(x, 0)$:

> $h(x)$

$$3\,x^4 \tag{1.2.2}$$

Det er tydeligt, at funktionen er **positiv** på hele den rette linje $y = 0$ pånær i origo, hvor funktionen er 0.

Hermed er det bevist, at $f(x, y)$ IKKE har lokalt minimum i origo.

Lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo

Ser på restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$ gennem origo (NB: $a \in \mathbb{R}$).
Udtrykket inkluderer ikke den lodrette linje $x = 0$, som skal specialundersøges.

Lodret linje

> $i(y) := f(0, y)$:

> $i(y)$

$$y^2 \tag{2.1.1}$$

Det ses tydeligt, at der er <u>egentligt lokalt minimum</u> i origo, når man tager restriktionen til den lodrette linje $x = 0$ gennem origo.

Ikke-lodret linje

> $j(x) := f(x, a \cdot x)$:

> $j(x)$

$$(a\,x - x^2)\,(a\,x - 3\,x^2) \tag{2.2.1}$$

> $mtaylor(j(x), [x = 0], 3)$

$$a^2\,x^2 \tag{2.2.2}$$

$a \neq 0$ (ikke-vandret, ikke lodret linje)

Taylor-approksimationen til 2. orden er klart positiv, når $x \neq 0$.
Derfor er der et <u>egentligt lokalt minimum</u> i 0, når $a \neq 0$.

$a = 0$ (vandret linje)

> $subs(a = 0, j(x))$

$$3\,x^4 \tag{2.2.2.1}$$

Funktionen er klart positiv, når $x \neq 0$.
Derfor er der et egentligt lokalt minimum i 0, når $a = 0$.

I hvilket interval er der lokalt minimum på linjen?

> $j(x) := f(x, a \cdot x)$:

> $j(x)$

$$(a x - x^2)(a x - 3 x^2) \tag{3.1}$$

> $factor(j(x))$

$$x^2 (a - x)(a - 3 x) \tag{3.2}$$

> $solve(j(x) = 0, x)$

$$a, \frac{a}{3}, 0, 0 \tag{3.3}$$

Lodret linje

> $i(y) := f(0, y)$:

> $i(y)$

$$y^2 \tag{3.1.1}$$

Altid positiv pånær i $x = 0$.

$a = 0$ (vandret linje)

Antag, at $a = 0$:

> $subs(a = 0, j(x))$

$$3 x^4 \tag{3.2.1}$$

Altid positiv pånær i $x = 0$.

$a > 0$ (positiv hældningskoefficient)

Antag at $a > 0$:
Da $a > 0$, er 2 af rødderne *positive*.
Der er 3 forskellige rødder: 0 , $\frac{1}{3} \cdot a$ og a .
0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0.
Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.
Da $a > 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $]-\infty; 0[$ og $\left]0; \frac{1}{3} \cdot a\right[$.
Derfor er der egentligt lokalt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a > 0$.

$a < 0$ (negativ hældningskoefficient)

Antag at $a < 0$:
Da $a < 0$, er 2 af rødderne nega*tive*.
Der er 3 forskellige rødder: a , $\frac{1}{3} \cdot a$ og 0 .
0 er en dobbeltrod, derfor skifter $j(x)$ ikke fortegn omkring 0.
Faktoropløsningen er: $j(x) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (a - 3 \cdot x)$.
Da $a < 0$ er $j(0) = 0$ og $j(x) > 0$ i intervallerne $\left]\frac{1}{3} \cdot a; 0\right[$ og $]0; \infty[$.
Derfor er der egentligt lokalt minimum i origo for restriktionen til den rette linje $y = a \cdot x$, hvor $a < 0$.

Generelt kan man sige, at - bortset fra den lodrette og den vandrette linje -

vil **origo være egentligt lokalt minimum på linjen i intervallet** $\left]-\frac{1}{3}\cdot|a|, \frac{1}{3}\cdot|a|\right[$.

Det betyder også, at når linjens hældningskoefficient a nærmer sig 0, så vil intervallets længde gå imod 0!
Derfor kan f have egentligt lokalt minimum på enhver ret linje gennem origo, og sådan at f ikke har et lokalt minimum i origo!