

## Planintegral (i 2 dimensioner)

restart

with(plots) :

with(Integrator8) :

with(plot2D3D2) = [NormalVektorer, TangentVektorer, plot2D, plot3D]

with(VektorAnalyse4) = [div, grad, kryds, prik, rot, vop]

### Parameterfremstilling af 2D-område i planen (eksempel)

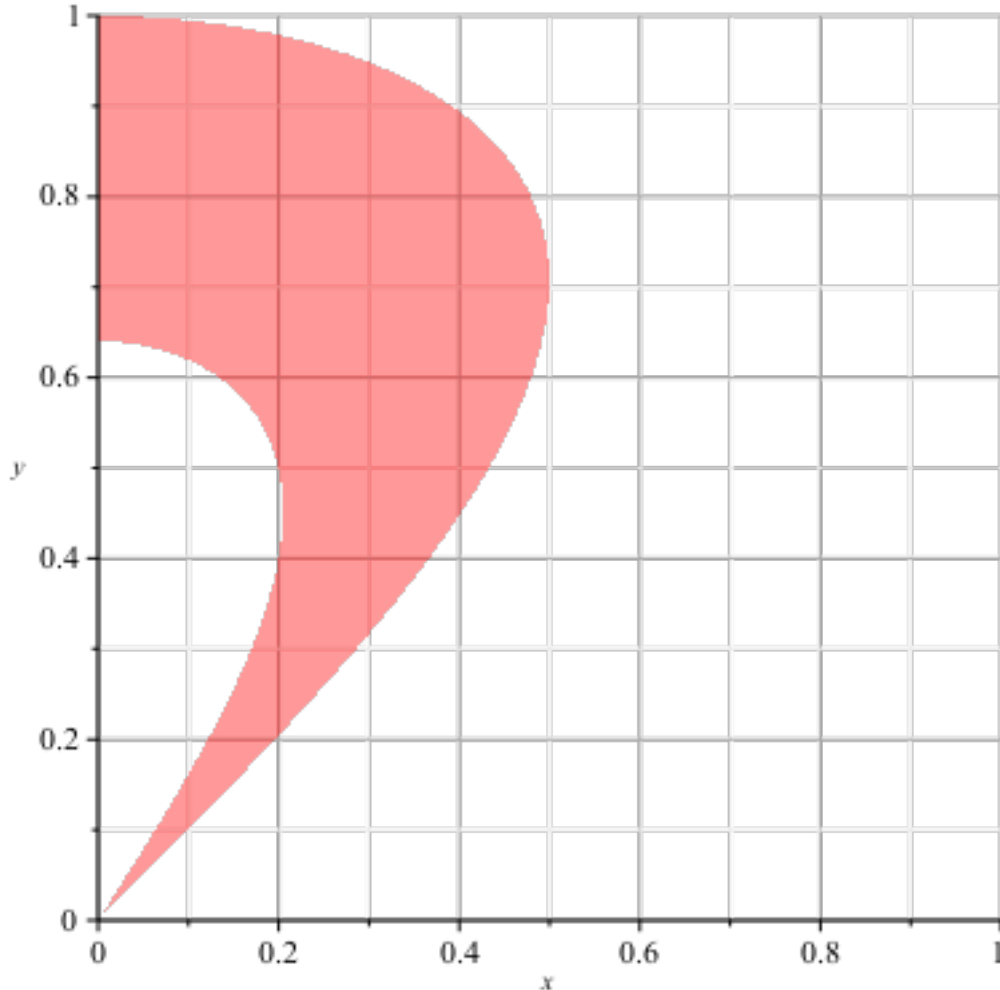
Parameterfremstilling af et 2D-område, hvor  $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  og  $v \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$ :

$r(u, v) := \langle v^4 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u), v^2 \cdot \cos(u) \rangle :$

$INT := \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1\right] :$

### Graf

$G := \text{display}(\text{plot2D}(r(u, v), INT), \text{color} = \text{red}, \text{gridlines}, \text{style} = \text{surface}, \text{transparency} = 0.6, \text{view} = [0 ..1, 0 ..1], \text{labels} = [x, y])$



### Areal af 2D-området

#### Trinvis

Først beregnes de partielle afledede. Opstilles i en 2 x 2 matrix kaldet Jacobi-matricen:

$J := \text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v), [u, v]) =$

$$\begin{bmatrix} v^4 \cos(u)^2 - v^4 \sin(u)^2 & 4 v^3 \sin(u) \cos(u) \\ -v^2 \sin(u) & 2 v \cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som den numeriske værdi af determinanten af Jacobi-matricen:

$$Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](J)| = 2 |\cos(u)^3 v^5 + v^5 \sin(u)^2 \cos(u)|$$

$$Jacobi := simplify(Jacobi) = 2 |\cos(u)| |v|^5$$

Arealet bestemmes så ved et dobbeltintegral:

$$\int_{\frac{4}{5}}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot Jacobi \, du \, dv = \frac{3843}{15625}$$

## Med færdig formel

$$\int_{\frac{4}{5}}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot |LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v), [u, v]))| \, du \, dv = \frac{3843}{15625}$$

## Med Integrator8-pakken

$$INT = \left[ 0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1 \right]$$

$$planIntGo(r, INT, 1) = \frac{3843}{15625}$$

$$evalf(\%) = 0.2459520000$$

**Konklusion:** arealet af 2D-området er ca. 0.25

## Masse af 2D-området

Hvis man antager, at 2D-området har en massetæthed (masse pr. arealenhed) kaldet  $f$ , så kan man beregne områdets samlede **masse**.

I dette eksempel afhænger massetætheden af både  $x$  og  $y$ :

$$f(x, y) := x + y$$

## Trinvis

Først beregnes de partielle afledede. Opstilles i en  $2 \times 2$  matrix kaldet Jacobi-matricen:

$$J := VectorCalculus[Jacobian](r(u, v), [u, v]) = \begin{bmatrix} v^4 \cos(u)^2 - v^4 \sin(u)^2 & 4 v^3 \sin(u) \cos(u) \\ -v^2 \sin(u) & 2 v \cos(u) \end{bmatrix}$$

Jacobi-funktionen beregnes så som den numeriske værdi af determinanten:

$$Jacobi := |LinearAlgebra[Determinant](J)| = 2 |\cos(u)^3 v^5 + v^5 \sin(u)^2 \cos(u)|$$

$$Jacobi := simplify(Jacobi) = 2 |\cos(u)| |v|^5$$

$$\int_{\frac{4}{5}}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(vop(r(u, v))) \cdot Jacobi \, du \, dv = \frac{2905683}{48828125} + \frac{325089 \pi}{6250000}$$

## Med færdig formel

$$\int_{\frac{4}{5}}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\text{vop}(r(u, v))) \cdot |\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](\text{VectorCalculus}[\text{Jacobian}](r(u, v), [u, v]))| \, du \, dv =$$

$$\frac{2905683}{48828125} + \frac{325089 \pi}{6250000}$$

### Med Integrator8-pakken

$$\text{INT} = \left[ 0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1 \right]$$

$$M := \text{planIntGo}(r, \text{INT}, f) = \frac{2905683}{48828125} + \frac{325089}{6250000} \pi$$

$$\text{evalf}(\%) = 0.2229159421$$

**Konklusion:** 2D-områdets masse er ca. 0.22

### Massemidtpunktet af 2D-området

Hvis man antager, at 2D-området har en massetæthed (masse pr. arealenhed) kaldet  $f$ , så kan man beregne områdets samlede masse.

Og beregne **massemidtpunktets placering**.

I dette eksempel afhænger massetætheden af både  $x$  og  $y$  med samme  $f$  som ovenfor.

#### Standardmetoden fra eNoterne

$$\text{INT}_x := r(u, v)[1] \cdot f(\text{vop}(r(u, v))) \cdot \text{Jacobi} =$$

$$2 v^4 \sin(u) \cos(u) (v^4 \sin(u) \cos(u) + v^2 \cos(u)) |\cos(u)| |v|^5$$

$$\text{INT}_x := \text{simplify}(\%) \text{ assuming } v > 0 = 2 v^{11} \sin(u) \cos(u)^2 (v^2 \sin(u) + 1) |\cos(u)|$$

$$\text{INT}_y := r(u, v)[2] \cdot f(\text{vop}(r(u, v))) \cdot \text{Jacobi} = 2 v^2 \cos(u) (v^4 \sin(u) \cos(u) + v^2 \cos(u)) |\cos(u)| |v|^5$$

$$\text{INT}_y := \text{simplify}(\%) \text{ assuming } v > 0 = 2 v^9 \cos(u)^2 (v^2 \sin(u) + 1) |\cos(u)|$$

$$\frac{\left[ \int_{\frac{4}{5}}^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{INT}_x \, du \right) dv, \int_{\frac{4}{5}}^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{INT}_y \, du \right) dv \right]}{M} = \left[ \frac{97434755193}{1708984375000}, \frac{308242443}{1953125000} \right]$$

$$\frac{2905683}{48828125} + \frac{325089 \pi}{6250000}$$

$$\text{evalf}(\%) = [0.2557612098, 0.7079804581]$$

Punktet er lavet som en **liste**, så ligner det koordinatparret, og er let at plotte med *pointplot*.

**NB:** Man kan dividere en hel liste med et tal uden at bruge  $\sim$ !

#### Med Integrator8-pakken

Parametrene til *planCmGo* er: parametriseringen, parameter-intervallerne, funktionen.

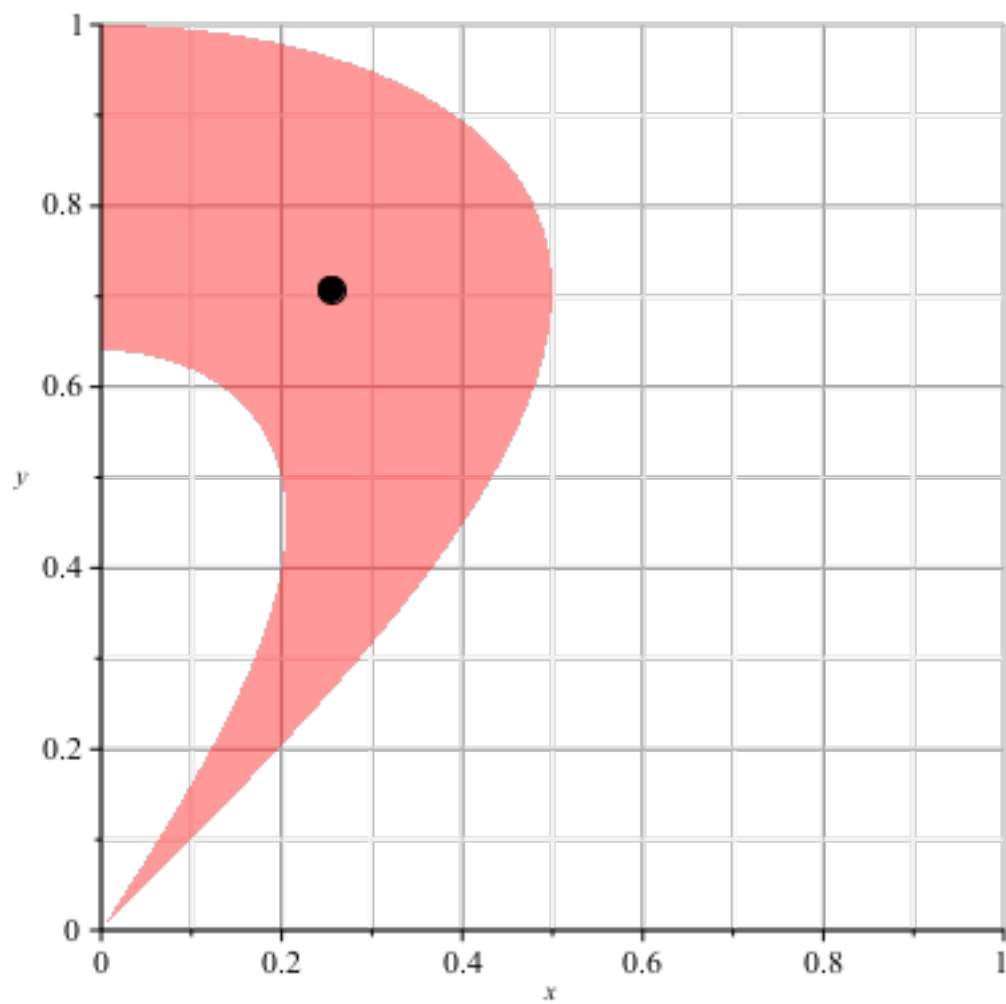
$$\text{planCmGo}\left(r, \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{5}, 1\right], f\right) = \left[ \frac{64956503462}{67799270000 + 59261015625 \pi}, \frac{205494962}{77484880 + 67726875 \pi} \right]$$

$$\text{CM} := \text{evalf}(\%) = [0.2557612098, 0.7079804581]$$

### Plot med massemidtpunktet

$$P := \text{pointplot}([ \text{CM} ], \text{color} = \text{black}, \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{symbolsize} = 20) :$$

$$\text{display}(G, P)$$



**Konklusion:** 2D-områdetets massemidt punkt ligger ca. i (0.26, 0.71]