

Tegning af 2D-parametriseret område

Anvendelse af Integrator8-pakken

Dobbeltintegraler med ikke-faste grænser

Eksemplerne er fra Maple-demo F07a_PlanOgFladeIntegral

Kortfattet oversigt over kommandoerne i Integrator8-pakken kan findes på Steens hjemmeside

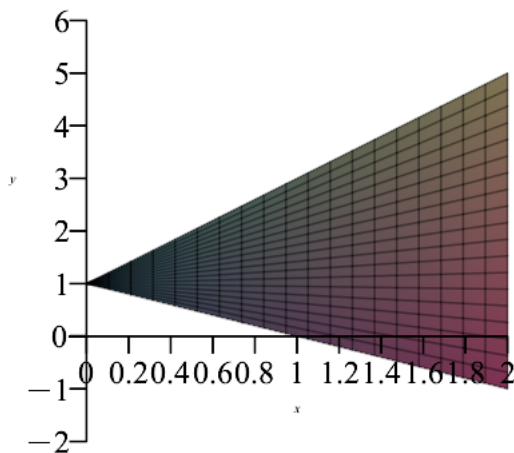
Plot af parametriseret område i planen (2D)

```
> restart
> with(Integrator8) :
```

Eksempel 1 (trekant)

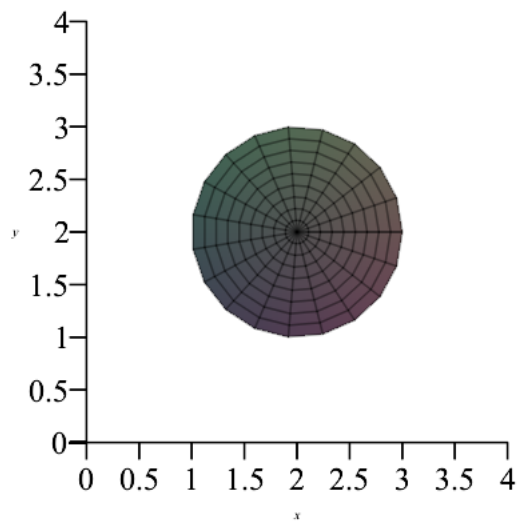
Det parametriserede 2D-område kan - *tilsyneladende* - kun tegnes ved at tegne et 3D-plot, som ses ovenfra!
Se senere om brug af Steens Maple-pakke "plot2D3D2".

```
> plot3d(⟨u, 1 - u + 3·v·u, 0⟩, u = 0..2, v = 0..1, labels = [x, y, ""], axes = normal, orientation = [-90, 0], view = [0..2, -2..6, -1..1], tickmarks = [10, 10, 10], grid = [20, 20])
```



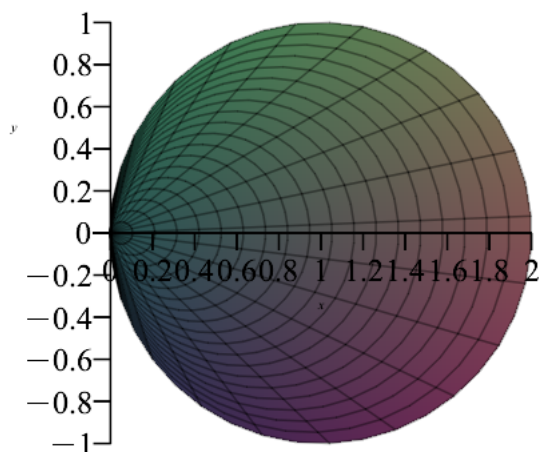
Eksempel 2 (cirkel)

```
> plot3d(⟨2 + u·cos(v), 2 + u·sin(v), 0⟩, u = 0..1, v = 0..2·π, labels = [x, y, ""], axes = normal, orientation = [-90, 0], view = [0..4, 0..4, -1..1], tickmarks = [10, 10, 10], grid = [10, 20])
```



Eksempel 3 (cirkel)

```
> plot3d(⟨2·u·cos(v)·cos(v), 2·u·cos(v)·sin(v), 0⟩, u=0..1, v=-π/2..π/2, labels=[x, y, ""], axes
= normal, orientation=[-90, 0], view=[0..2, -1..1, -1..1], tickmarks=[10, 10, 10], grid
=[20, 40])
```

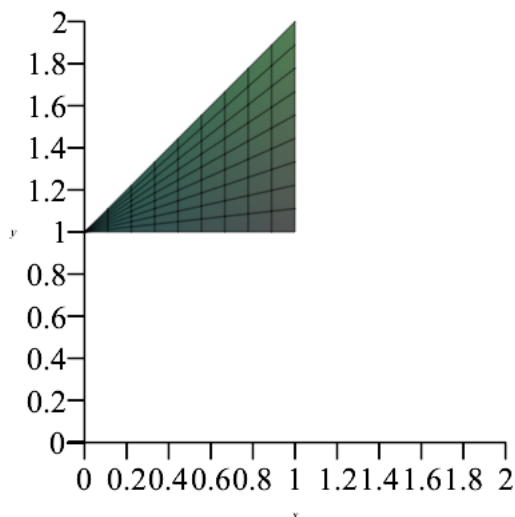


Et planintegral over et trekantet område

```
> r(u, v) := ⟨u, 1 + v·u⟩ :
'r(u, v)' = r(u, v)
```

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v u + 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.1)$$

> `plot3d(⟨r(u, v)[1], r(u, v)[2], 0⟩, u = 0 .. 1, v = 0 .. 1, labels = [x, y, ""], axes = normal, orientation = [-90, 0], view = [0 .. 2, 0 .. 2, -1 .. 1], tickmarks = [10, 10, 10], grid = [10, 10])`



a) Beregnet med Integrator8-pakken

> `f(x, y) := 2 · x · y`

$$f := (x, y) \mapsto 2 \cdot y \cdot x \quad (1.4.1.1)$$

> `B := [0, 1, 0, 1]`

$$B := [0, 1, 0, 1] \quad (1.4.1.2)$$

> `planIntGo(r, B, f)`

$$\frac{11}{12} \quad (1.4.1.3)$$

b) Beregnet med **integral, hvor grænserne ikke er konstante**

Parameteren y løber mellem 1 og $x+1$ (idet den rette linje $y = x + 1$ begrænser opadtil).
Parameteren x løber mellem 0 og 1.

> $\int_0^1 \int_1^{x+1} f(x, y) \, dy \, dx$

$$\frac{11}{12} \quad (1.4.2.1)$$

Opdelt i 2 trin:

> $\int_1^{x+1} f(x, y) \, dy$

$$x \left((x+1)^2 - 1 \right) \quad (1.4.2.2)$$

> $\int_0^1 (1.4.2.2) \, dx$

$$(1.4.2.3)$$

$$\frac{11}{12}$$

(1.4.2.3)

eller

Parameteren x løber mellem $y - 1$ og 1 (idet den rette linje $y = x + 1$ begrænser opadtil).
Parameteren y løber mellem 1 og 2 .

$$> \int_1^2 \int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy$$

$$\frac{11}{12}$$

(1.4.2.4)

Opdelt i 2 trin:

$$> \int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx$$

$$y(1 - (y - 1)^2)$$

(1.4.2.5)

$$> \int_1^2 (1.4.2.5) \, dy$$

$$\frac{11}{12}$$

(1.4.2.6)

▼ Et planintegral og massemidtpunkt

▼ Planintegralet

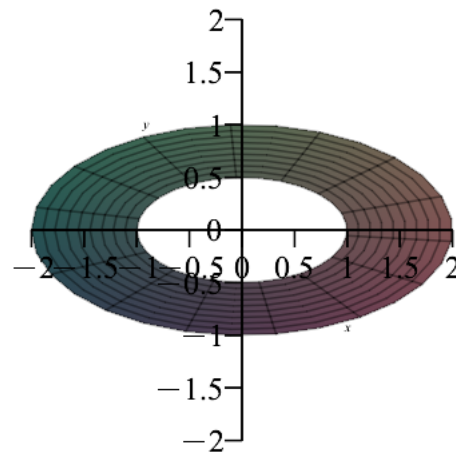
$$> r(u, v) := \left\langle u \cdot \cos(v), \frac{1}{2} \cdot u \cdot \sin(v) \right\rangle :$$

$$'r(u, v)' = r(u, v)$$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos(v) \\ \frac{u \sin(v)}{2} \end{bmatrix}$$

(1.5.1.1)

$$> \text{plot3d}(r(u, v)[1], r(u, v)[2], 0, u = 1 .. 2, v = -\pi .. \pi, \text{labels} = [x, y, ""], \text{axes} = \text{normal}, \text{orientation} = [-90, 0], \text{view} = [-2 .. 2, -2 .. 2, -1 .. 1], \text{tickmarks} = [10, 10, 10], \text{grid} = [10, 30])$$



```
> f(x, y) := (x - 1)^2 (y + 1)^2
```

$$f := (x, y) \mapsto (x - 1)^2 \cdot (y + 1)^2$$

(1.5.1.2)

```
> B := [1, 2, -pi, pi]
```

$$B := [1, 2, -\pi, \pi]$$

(1.5.1.3)

```
> planIntGo(r, B, f)
```

$$\frac{267 \pi}{64}$$

(1.5.1.4)

▼ **Massemidtpunktet**

```
> planCmGo(r, B, f)
```

$$\left[-\frac{94}{89}, \frac{34}{89} \right]$$

(1.5.2.1)