En partikulær løsning til en 2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter, hvor højresiden består af en linearkombination af de trignometriske funktioner sin og cos

Anvender **metode 18.9** (ikke den komplekse gættemetode i metode 18.18).

Metode 18.9 Trigonometrisk

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{18-38}$$

hvor $q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, har samme form:

$$x_0(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t), \quad t \in I, \tag{18-39}$$

hvor A og B bestemmes ved at indsætte udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning.

Eksempel 18.10

Bestemmelse af en partikulær løsning, dvs. en enkel inhomogen løsning.

Eksempel 18.10 Trigonometrisk

Givet er differentialligningen

$$x''(t) + x'(t) - x(t) = -20\sin(3t) + 6\cos(3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

restart

Den homogene venstreside af differentialligningen kan udtrykkes ved denne lineære afbildning:

$f(X) := \mathit{diff}(X, t, t) + \mathit{diff}(X, t) - X:$

$$f(X(t)) = \frac{d^2}{dt^2} X(t) + \frac{d}{dt} X(t) - X(t)$$

Højresiden er en linearkombination af sin og cos med samme konstant (her 3) foran t:

$HS := -20 \cdot \sin(3 \cdot t) + 6 \cdot \cos(3 \cdot t) :$

Kvalificeret gæt:
$xGÆT(t) := A \cdot \sin(3 \cdot t) + B \cdot \cos(3 \cdot t) :$

$xGÆT(t) = A\sin(3\,t) + B\cos(3\,t)$

De 2 sider i differentialligningen subtraheres, dvs. det skal være 0 for alle $t \in \mathbb{R}$:

$$f(xGÆT(t)) - HS = -10\,A\sin(3\,t) - 10\,B\cos(3\,t) + 3\,A\cos(3\,t) - 3\,B\sin(3\,t) + 20\sin(3\,t) - 6\cos(3\,t)$$

Ledene samles efter sin og cos:
$L := collect(\%, \{\sin, \cos\}) = (3\,A - 10\,B - 6)\cos(3\,t) + (-10\,A - 3\,B + 20)\sin(3\,t)$

Udtrykket skal være 0 for alle værdier af t.
Derfor skal koefficienterne til sin og cos være 0.

Det løses lettest ved at indsætte 2 værdier for t (0 giver at sin-leddet udgår, $\frac{\pi}{6}$ giver at cos-leddet udgår):

$L_1 := simplify(subs(t=0, L)) = 3\,A - 10\,B - 6$

$L_2 := simplify\left(subs\left(t=\frac{\pi}{6}, L\right)\right) = -10\,A - 3\,B + 20$

$solve(\{L_1 = 0, L_2 = 0\}, \{A, B\}) = \{A = 2, B = 0\}$

Disse 2 konstanter indsættes i $xGÆT$ for at bestemme en partikulær løsning:
$subs(\%, xGÆT(t)) = 2\sin(3\,t)$

Konklusion: en partikulær løsning til differentialligningen er $\underline{\underline{x(t) = 2\cdot\sin(3\cdot t)}}$ hvor $t \in \mathbb{R}$

(stemmer med formel 18-45 side 10 i eNote 18)

Eksempel 18. 19

Bestemmelse af en partikulær løsning, dvs. en enkel inhomogen løsning.

NB: Her bestemmes dwen partikulære løsning **ikke** med den komplekse gættemetode.
Her anvendes en forbedret udgave af ovenstående metode.

Eksempel 18.19 Den komplekse gættemetode

Givet er en 2. ordens inhomogene differentialligning:

$$x''(t) - 2x'(t) - 2x(t) = 19e^{4t}\cos(t) - 35e^{4t}\sin(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestem en partikulær løsning til denne differentialligning.

restart

Den homogene venstreside af differentialligningen kan udtrykkes ved denne lineære afbildning:

$f(X) := diff(X, t, t) - 2\cdot diff(X, t) - 2\cdot X:$

$$f(X(t)) = \frac{d^2}{dt^2}X(t) - 2\frac{d}{dt}X(t) - 2\,X(t)$$

Højresiden er en linearkombination af sin og cos med samme konstant (her 1) foran t samt den samme eksponentialfunktion med faktor 4:

$HS := 19 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \cos(t) - 35 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot \sin(t) :$

Kvalificeret gæt:

$xGÆT(t) := e^{4 \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t)) :$

$xGÆT(t) = e^{4t} (A \cos(t) + B \sin(t))$

De 2 sider i differentialligningen subtraheres, dvs. det skal være 0 for alle $t \in \mathbb{R}$:

$f(xGÆT(t)) - HS =$

$$6 e^{4t} (A \cos(t) + B \sin(t)) + 6 e^{4t} (-A \sin(t) + B \cos(t)) + e^{4t} (-A \cos(t) - B \sin(t)) - 19 e^{4t} \cos(t) + 35 e^{4t} \sin(t)$$

Ledene samles efter sin og cos:

$factor(\%) \quad = e^{4t} (5 A \cos(t) - 6 A \sin(t) + 6 B \cos(t) + 5 B \sin(t) - 19 \cos(t) + 35 \sin(t))$

$L := collect(\%, \{\sin, \cos\}) \quad = e^{4t} (5 A + 6 B - 19) \cos(t) + e^{4t} (-6 A + 5 B + 35) \sin(t)$

Udtrykket skal være 0 for alle værdier af t.
Derfor skal koefficienterne til sin og cos være 0.

Det løses lettest ved at indsætte 2 værdier for t (0 giver at sin-leddet udgår, $\frac{\pi}{2}$ giver at cos-leddet udgår):

$L_1 := simplify(subs(t = 0, L)) = 5 A + 6 B - 19$

$L_2 := simplify\left(subs\left(t = \frac{\pi}{2}, L\right)\right) = e^{2\pi} (-6 A + 5 B + 35)$

$solve(\{L_1 = 0, L_2 = 0\}, \{A, B\}) = \{A = 5, B = -1\}$

Disse 2 konstanter indsættes i $xGÆT$ for at bestemme en partikulær løsning:

$subs(\%, xGÆT(t)) = e^{4t} (5 \cos(t) - \sin(t))$

Konklusion: en partikulær løsning til differentialligningen er $\underline{\underline{x(t) = e^{4 \cdot t} \cdot (5 \cdot \cos(t) - \sin(t)}}$ hvor $t \in \mathbb{R}$

(stemmer med formel 18-84 side 18 i eNote 18)