Parametrisering af trekanter

Eksempel på parametrisering af en trekant i $\mathbb{R}^3$

$restart:$
$with(plots):$

Givet 3 hjørner i trekanten i $\mathbb{R}^3$ (med pæne koordinater):
$A := \langle 0, 0, 1\rangle : B := \langle 1, 0, 0\rangle : C := \langle 0, 1, 0\rangle :$
De 3 punkter ligger på hver sin akse i $\mathbb{R}^3$.

Punktet Q ligger på linjestykket mellem B og C.
D kan opskrives med den sædvanlige parameterfremstilling kendt fra gymnasiet:
$\boldsymbol{Q := C + u\cdot(B - C):}$
hvor $u \in [0; 1]$.
Når $u = 0$ er $Q = C$. Når $u = 1$ er $Q = B$.

Tilsvarende vil et punkt P mellem A og D være givet ved parameterfremstillingen:
$\boldsymbol{P := A + v\cdot(Q - A):}$
hvor $v \in [0; 1]$.
Når $v = 0$ er $P = A$. Når $v = 1$ er $P = Q$.

Dvs. ethvert punkt P i ΔABC kan parametriseres ved:
$\boldsymbol{r(u, v) := P:}$
hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

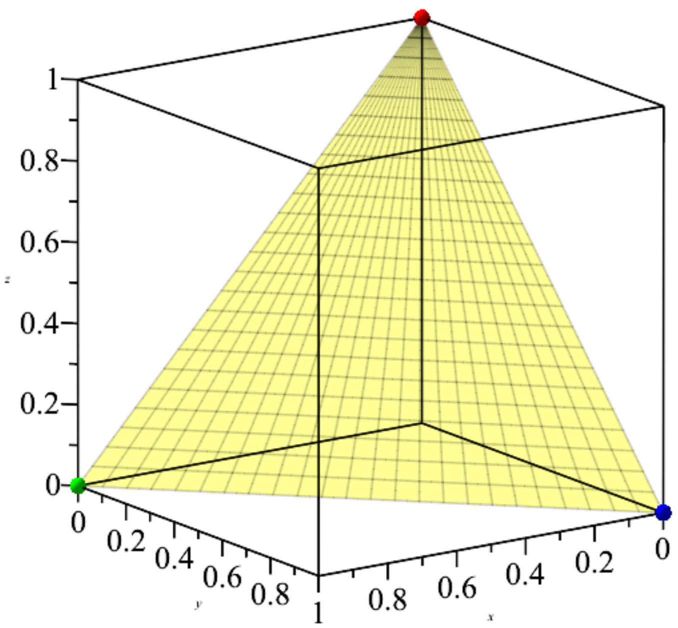
Parametriseringen lyder så:

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} v\,u \\ v\,(1 - u) \\ 1 - v \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

$punktA := pointplot3d(A, symbol = solidsphere, symbolsize = 20, color = red):$
$punktB := pointplot3d(B, symbol = solidsphere, symbolsize = 20, color = green):$
$punktC := pointplot3d(C, symbol = solidsphere, symbolsize = 20, color = blue):$
$trekantABC := plot3d(r(u, v), u = 0 ..1, v = 0 ..1, axes = normal, labels = [x, y, z], color = yellow, transparency = 0.5):$

$display(punktA, punktB, punktC, trekantABC, axes = box)$



Punktet A er **rød**, punktet B er **grøn**,punktet C er **blåt** og selve trekant ABC er gul.

Generel formel for parametriseringen af en trekant i $\mathbb{R}^3$

restart

Givet de 3 hjørner:

$A := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : B := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle : C := \langle c_1, c_2, c_3 \rangle :$

$Q := C + u \cdot (B - C) :$
$P := A + v \cdot (Q - A) :$
$r(u, v) := P :$

eller en samlet formel:

$$r(u, v) := A + v \cdot ((C + u \cdot (B - C)) - A) :$$

Parametriseringen lyder så:

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} a_1 + v\,(c_1 + u\,(b_1 - c_1) - a_1) \\ a_2 + v\,(c_2 + u\,(b_2 - c_2) - a_2) \\ a_3 + v\,(c_3 + u\,(b_3 - c_3) - a_3) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

Parametriseringen af en 'skæv' trekant i $\mathbb{R}^2$

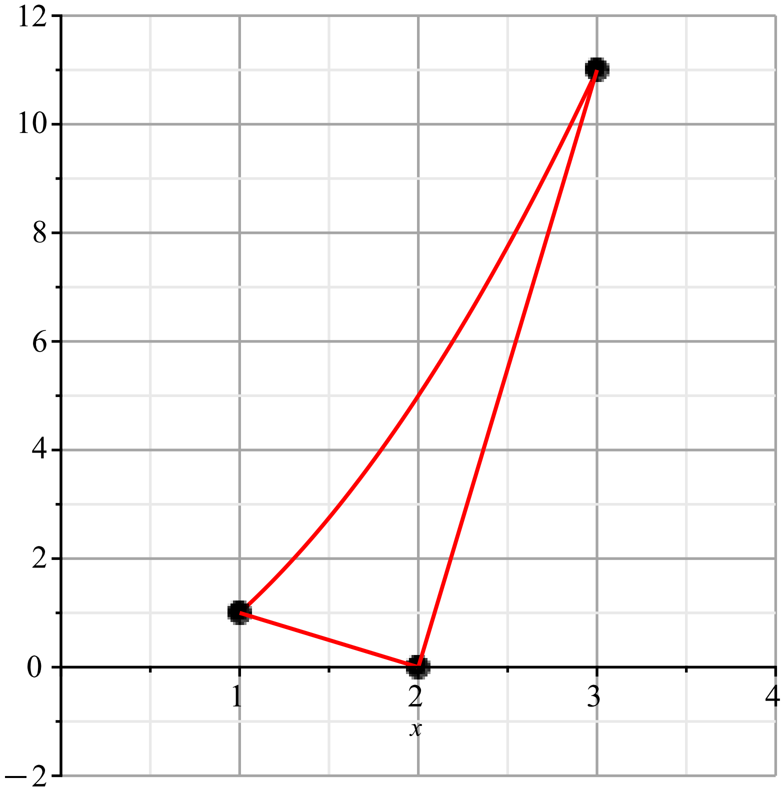
restart
with(*plots*) :
with(*plot2D3D2*) :

Antag, at den ene side i trekanten er 'skæv', dvs. ikke en ret linje, men f.eks. et parabelstykke.
Hvad gør man så?

$f(x) := x^2 + x - 1:$
$f(1) = 1$
$f(3) = 11$

3 punkter: (2,0) samt (1,1) og (2,11).

$P1 := plot(f(x), x = 1..3, color = red, gridlines, view = [0..4, -2..12]):$
$P2 := pointplot([[1, f(1)], [2, 0], [3, f(3)]], symbol = solidcircle, symbolsize = 20):$
$L1 := plot([t, -1 \cdot (t-1) + 1, t = 1..2], color = red):$
$L2 := plot([t, 11 \cdot (t-2) + 0, t = 2..3], color = red):$
$display(P1, P2, L1, L2)$



Parametriseringen af parabelstykket er givet ved:
$r_P(u) := \langle u, f(u) \rangle :$

$$r_P(u) = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + u - 1 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [1..3]$

Vektoren mellem punktet (2,0) og et punkt på parabelstykket er givet ved:
$r_V(u) := r_P(u) - \langle 2, 0 \rangle :$

$$r_V(u) = \begin{bmatrix} u - 2 \\ u^2 + u - 1 \end{bmatrix}$$

For at opnå hele stykket mellem (2,0) og parabelstykket skal man **gange vektoren med en faktor v**:
$r_{PV}(u) := v \cdot r_V(u) :$

$$r_{PV}(u) = \begin{bmatrix} v(u-2) \\ v(u^2 + u - 1) \end{bmatrix}$$

hvor $v \in [0; 1]$

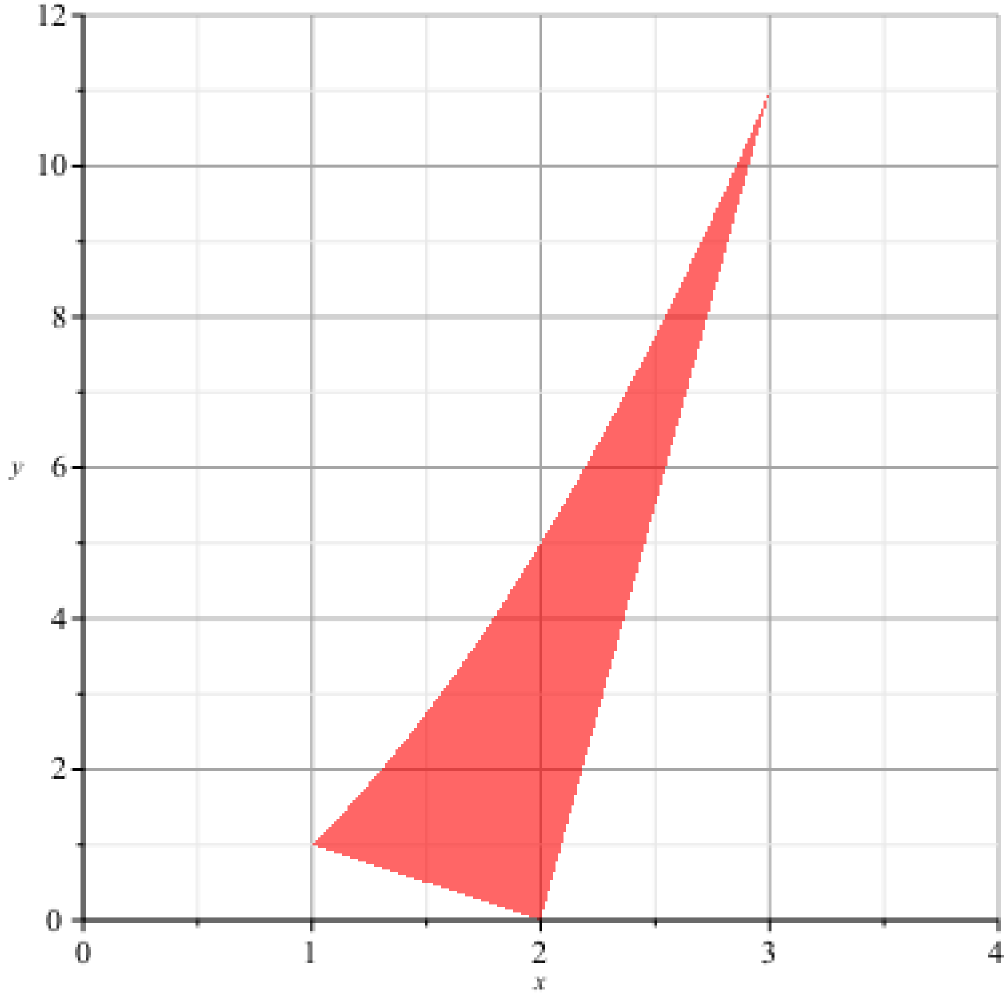
Hertil skal lægges startpunktet (2,0):
$r(u, v) := r_{PV}(u) + \langle 2, 0 \rangle :$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} v\,(u-2)+2 \\ v\,(u^2+u-1) \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [1..3]$ og $v \in [0; 1]$.

Test af parametriseringen

$INT := [1, 3, 0, 1]:$
$display(plot2D(r(u, v), INT), color = red, gridlines, style = surface, transparency = 0.4, view = [0..4, 0..12], labels = [x, y])$



Generel formel for parametriseringen af en 'skæv' trekant i $\mathbb{R}^2$

$restart$
$with(plots):$
$with(plot2D3D2):$

Givet en funktion $f(x)$, som begrænser opadtil eller nedadtil.
Givet x-intervallet $[a; b]$.

Givet et punkt (c, d).

Parametriseringen af det plane område:
$r(u, v) := v \cdot (\langle u, f(u)\rangle - \langle c, d\rangle) + \langle c, d\rangle :$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} v\,(u-c)+c \\ v\,(f(u)-d)+d \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [a; b]$ og $v \in [0; 1]$.

Test af parametriseringen med et eksempel (1)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot e^x + 1 :$

$a := 0 : b := 2 : c := 1 : d := 10 :$

$$r(u,v) = \begin{bmatrix} v\,(u-1)+1 \\ v\left(\frac{e^u}{2}-9\right)+10 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [a; b]$ og $v \in [0; 1]$.

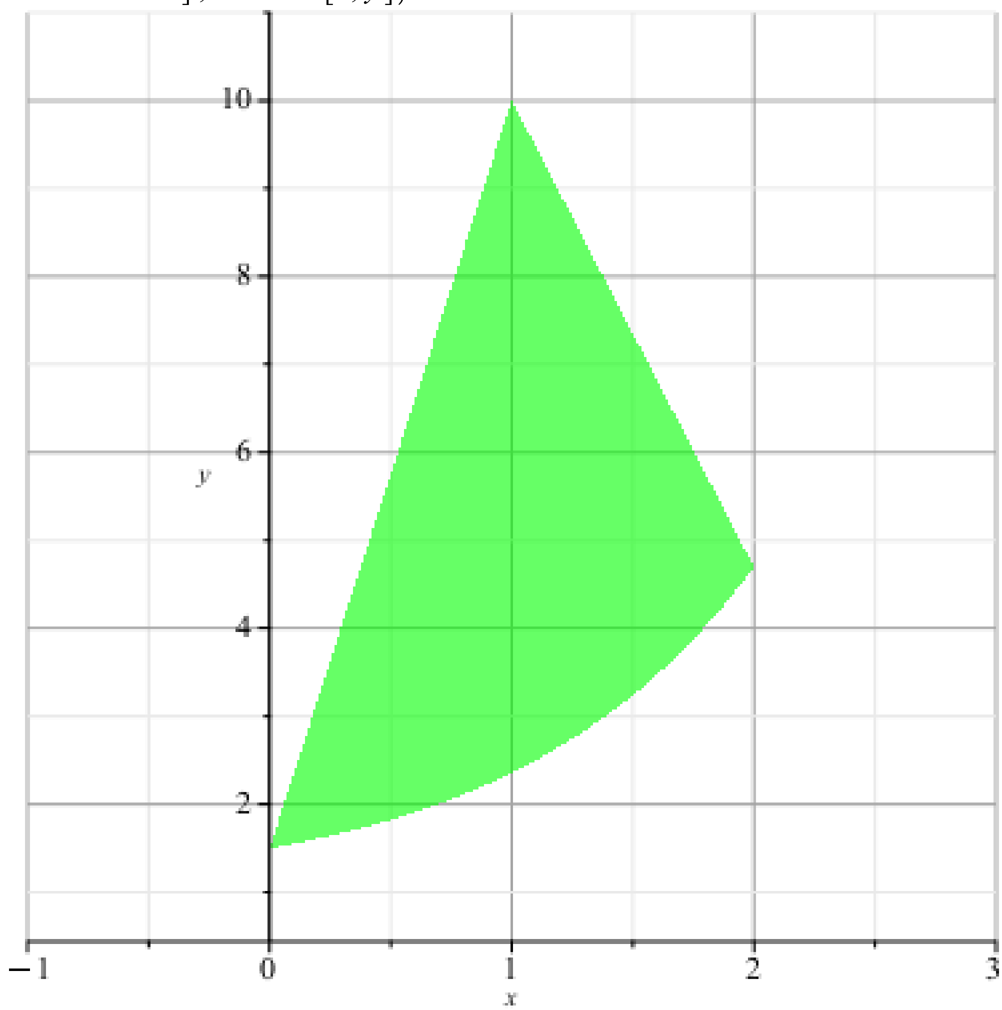
Beregner fornuftige y-grænser på tegningen:

$MAX := \max(maximize(f(x), x = a..b), d) = 10$

$MIN := \min(minimize(f(x), x = a..b), d) = \frac{3}{2}$

$INT := [a, b, 0, 1] = [0, 2, 0, 1]$

$display(plot2D(r(u, v), INT), color = green, gridlines, style = surface, transparency = 0.4, view = [a-1..b+1, MIN-1..MAX+1], labels = [x, y])$



Test af parametriseringen med et eksempel (2)

$f(x) := \sin(x) + 1 :$

$a := 0 : b := 2 \cdot \pi : c := 4 : d := -4 :$

$$r(u,v) = \begin{bmatrix} v\,(u-4)+4 \\ v\,(\sin(u)+5)-4 \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [a; b]$ og $v \in [0; 1]$.

Beregner fornuftige y-grænser på tegningen:

$MAX := \max(maximize(f(x), x = a..b), d) = 2$
$MIN := \min(minimize(f(x), x = a..b), d) = -4$

$INT := [a, b, 0, 1] = [0, 2\pi, 0, 1]$
$display(plot2D(r(u, v), INT), color = blue, gridlines, style = surface, transparency = 0.4, view = [a - 1..b + 1, MIN - 1..MAX + 1], labels = [x, y])$