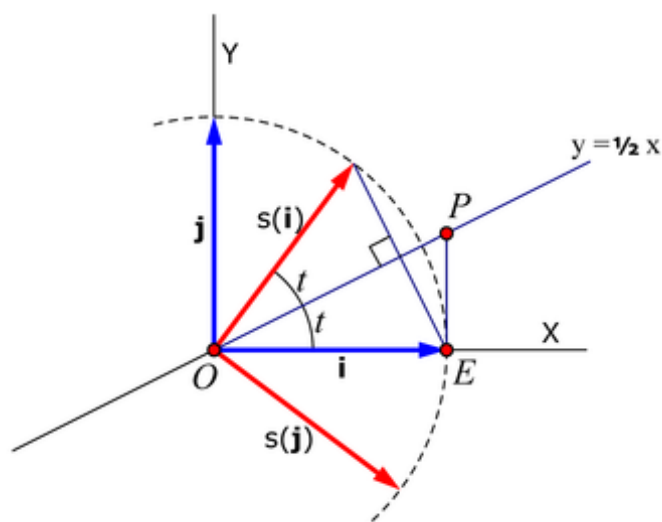


## Uge 8, StoreDag, Opgave 6: Spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$

4 beviser!

### Metode 1 (brug af trigonometriske formler for dobbelte vinkler)

Bestemmelse af afbildningsmatricen hørende til spejling i linjen  $y = \frac{1}{2} \cdot x$



(figur 12.11 i eNote 12)

Linjen  $y = \frac{1}{2} \cdot x$  har hældningskoefficienten  $\frac{1}{2}$ .

Derfor gælder, at  $\tan(t) = \frac{1}{2}$

Anvender formler for  $\sin(2 \cdot t)$  og  $\cos(2 \cdot t)$  :

[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_trigonometric\\_identities#Double-angle.2C\\_triple-angle.2C\\_and\\_half-angle\\_formulae](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities#Double-angle.2C_triple-angle.2C_and_half-angle_formulae)

Sine	Cosine
$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ $= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$	$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $= 2 \cos^2 \theta - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 \theta$ $= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

$$\text{Dvs. } \cos(2 \cdot t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{og } \sin(2 \cdot t) = \frac{2 \cdot \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

Så koordinaterne for  $s(\mathbf{i}) = (\cos(2 \cdot t), \sin(2 \cdot t)) = \underline{\underline{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$

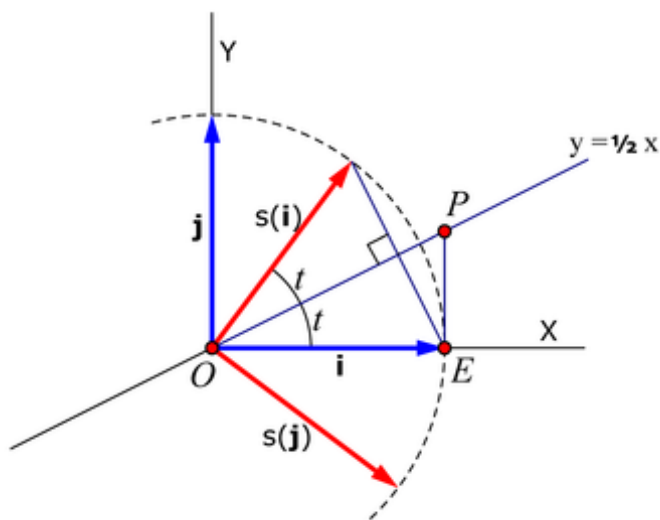
Da  $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$  vil  $s(\mathbf{i}) \perp s(\mathbf{j})$ .

Mere præcist er  $s(\mathbf{j}) = -\text{tværvektor}(s(\mathbf{i})) = -\text{tværvektor}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}}$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne: 
$$\begin{bmatrix} s(\mathbf{i})_x & s(\mathbf{j})_x \\ s(\mathbf{i})_y & s(\mathbf{j})_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}}$$

## Metode 2 (brug af drejninger)

Bestemmelse af afbildningsmatricen hørende til spejling i linjen  $y = \frac{1}{2} \cdot x$



(figur 12.11 i eNote 12)

Anvender rotationsmatricen i  $\mathbb{R}^2$ , dvs. 2 dimensioner.

Lad  $t$  have samme betydning som ovenfor.

**Afbildningen opbygges af 3 lineære afbildninger:**

- 1) Først *drejes* vinklen  $-t$  med uret. Nu ligger spejlingsaksen  $y = \frac{1}{2} \cdot x$  på selve x-aksen.
- 2) Så foretages en *spejling* i x-aksen.
- 3) Til sidst *drejes* vinklen  $t$  med uret. Dette er den inverse afbildning af nr. 1.

Rotationsmatricer findes let på Wikipedia:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation\\_matrix](http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix)

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Spejling i x-aksen:  $\mathbf{i}$  går over i sig selv, og  $\mathbf{j}$  går over i  $-\mathbf{j}$ .

Matricerne har så følgende værdi:

> restart

$$> A1 := \begin{bmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix}$$

$$A1 := \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$> A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$> A3 := A1^{-1}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & -\frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$> A3 := \text{simplify}(A3)$$

$$A3 := \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

De 3 lineære afbildninger sættes sammen:

$$> A := A3 \cdot A2 \cdot A1$$

$$A := \begin{bmatrix} \cos(t)^2 - \sin(t)^2 & 2 \cos(t) \sin(t) \\ 2 \cos(t) \sin(t) & \sin(t)^2 - \cos(t)^2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$> A := \text{simplify}(A)$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 \cos(t)^2 - 1 & 2 \cos(t) \sin(t) \\ 2 \cos(t) \sin(t) & -2 \cos(t)^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

**NB: I følge formlerne for dobbelte vinkler ovenfor:**

Sine	Cosine
$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ $= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$	$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $= 2 \cos^2 \theta - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 \theta$ $= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

er denne matrix  $A$  identisk med  $\begin{bmatrix} \cos(2 \cdot t) & \sin(2 \cdot t) \\ \sin(2 \cdot t) & -\cos(2 \cdot t) \end{bmatrix}$   
som jo netop har søjlevektorerne  $s(\mathbf{i})$  og  $-tv\ddot{a}rvektor(s(\mathbf{i}))$ .

Linjen  $y = \frac{1}{2} \cdot x$  har hældningskoefficienten  $\frac{1}{2}$ .

Derfor gælder, at  $\tan(t) = \frac{1}{2}$

Nu indsættes værdien af  $t$  :

$$> t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right) :$$

Og afbildningsmatricen kan bestemmes:

>  $A$

$$\begin{bmatrix} 2 \cos(t)^2 - 1 & 2 \cos(t) \sin(t) \\ 2 \cos(t) \sin(t) & -2 \cos(t)^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

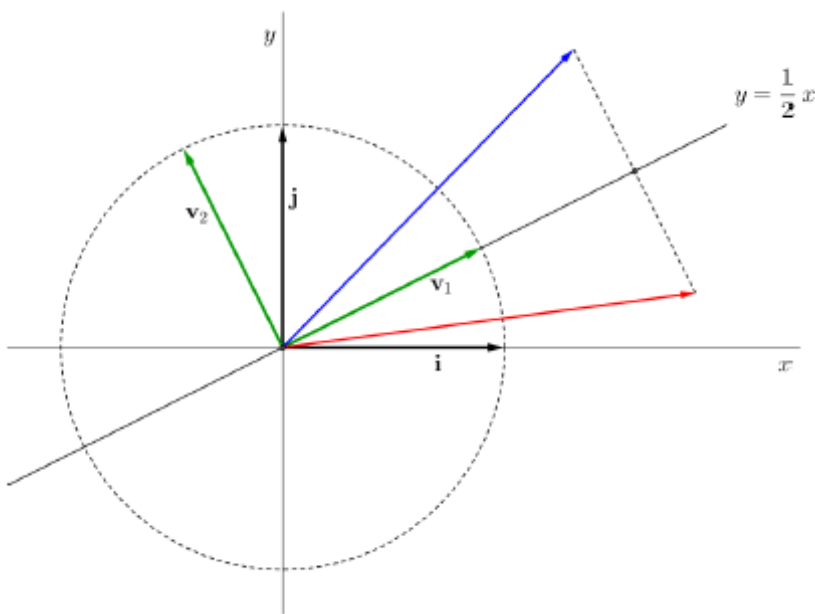
>  $\text{simplify}(A)$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

### Metode 3a (ved brug af basisskifte)



(figur fra opgave 6)

Linjen  $y = \frac{1}{2} \cdot x$  har hældningskoefficienten  $\frac{1}{2}$ .

Vinklen  $t$  hørende til  $v_1$  er givet ved  $\tan(t) = \frac{1}{2}$ , dvs.  $t = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ .

>  $\text{restart}$

$$> t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right) :$$

$$> v_1 := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$v_2$  er givet ved tværvektoren til  $v_1$ .

$$> v_2 := \begin{bmatrix} -v_1[2, 1] \\ v_1[1, 1] \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

eller blot:

$$> v_2 := \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Basisskiftematrix  $eMv$  :

$$> eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle$$

$$eMv := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$> vMe := eMv^{-1}$$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Afbildningsmatrix i basis  $(v_1, v_2)$  :

$$> vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Afbildningsmatrix i basis  $(e_1, e_2)$  :

$$> eFe := eMv.vFv.vMe$$

(3.7)

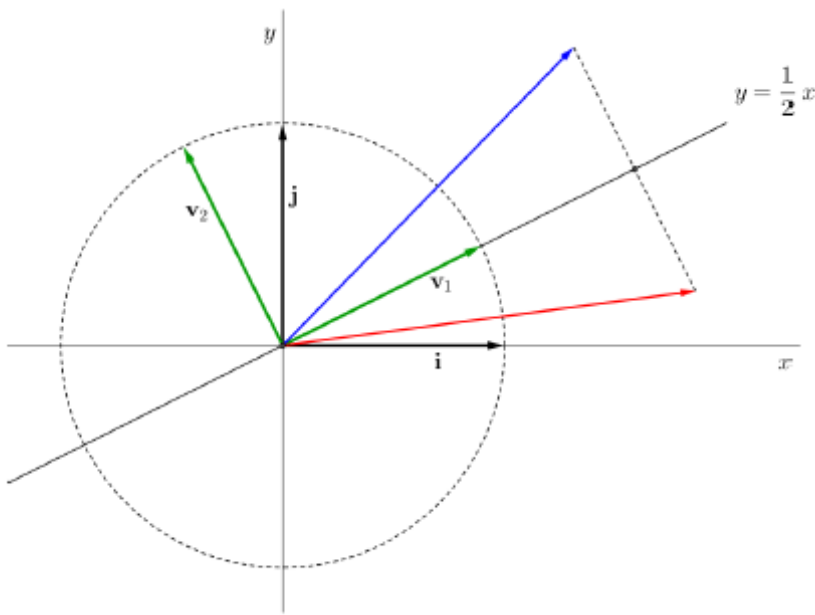
$$eFe := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(3.7)

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

### Metode 3b (ved brug af basisskifte)



(figur fra opgave 6)

Linjen  $y = \frac{1}{2} \cdot x$  har hældningskoefficienten  $\frac{1}{2}$ .

Retningen er således givet ved vektoren:  $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

Enhedsvektoren i samme retningen har så koordinaterne:

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

Dette er faktisk vektor  $v_1$ !

> restart

$$> v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$v_2$  er givet ved tværvektoren til  $v_1$ .

$$> v_2 := \begin{bmatrix} -v_1[2] \\ v_1[1] \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Basisskiftematrix  $eMv$  :

$$> eMv := \langle v_1 | v_2 \rangle$$

$$eMv := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$> vMe := eMv^{-1}$$

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Afbildningsmatrix i basis  $(v_1, v_2)$  :

$$> vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Afbildningsmatrix i basis  $(e_1, e_2)$  :

$$> eFe := eMv \cdot vFv \cdot vMe$$

$$eFe := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Afbildningsmatricen har altså koordinaterne:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$