

Uge 10, SD, opgave 5 - udvidet for bedre forståelse!

Opg 5: Egenverdier i funktionsrum

Betragt den lineære afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ givet ved

$$f(x(t)) = x'(t) - x(t).$$

Lad U betegne det underrum i $C^\infty(\mathbb{R})$ som har basis $v = (e^{-t}, 1, e^t, e^{2t})$.

restart

with(LinearAlgebra) :

$$f(x) := \text{diff}(x, t) - x :$$

Bemærk, hvordan man skal definere funktionen!

c)

C Vis at billedmængden $f(U)$ er et underrum i U , og bestem afbildningsmatricen ${}_vF_v$ for afbildningen $f : U \rightarrow U$ med hensyn til basis v .

$$f \sim ([e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}]) = [-2e^{-t}, -1, 0, e^{2t}]$$

NB: tilde-tegnet \sim anvendes til at få funktionen anvendt på alle 4 elementer i listen!

Dvs. billedrummet: $f(U) = \text{span}\{e^{-t}, 1, e^{2t}\}$

Derfor vil $f(U) \subseteq U$.

Og $f(U)$ har dimension 3, mens U har dimension 4.

Afbildningsmatricen i basis v :

$${}_vF_v := \text{DiagonalMatrix}(\langle -2, -1, 0, 1 \rangle) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

Login

Bestem koordinatvektoren for

$$q(t) = -6e^{-t} + e^{2t} + 2$$

D med hensyn til basis v , og find ved hjælp af den i forrige spørgsmål fundne afbildningsmatrix samtlige løsninger i U til ligningen

$$f(x(t)) = q(t).$$

Højresiden $q(t)$ kan udtrykkes i v -basis som:

$$q := \langle -6, 2, 0, 1 \rangle = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Differentialligningen kan løses i U :

$$\text{LinearSolve}(vFv, q) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -t_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen i U er: $\langle 3, -2, 0, 1 \rangle + c \cdot \langle 0, 0, 1, 0 \rangle$ eller $x(t) = 3 \cdot e^{-t} - 2 + e^{2t} + c \cdot e^t$ hvor $c \in \mathbb{R}$.

Der er altså uendelig mange løsninger.

Altså en partikulær løsning til det inhomogene system + den fuldstændige løsning til det homogene system.

e)

Sammenlign resultatet i foregående spørgsmål med det som Maple's `dsolve` angiver. Hvorfor er der ikke i $C^\infty(\mathbb{R})$ flere løsninger til ligningen

E

$$f(x(t)) = q(t)$$

end der er i underrummet U ?

$$\text{dsolve}(x'(t) - x(t) = -6 \cdot e^{-t} + e^{2t} + 2) = x(t) = 3 e^{-t} - 2 + e^{2t} + e^t _C1$$

eller:

$$\text{dsolve}(f(x(t)) = -6 \cdot e^{-t} + e^{2t} + 2) = x(t) = 3 e^{-t} - 2 + e^{2t} + e^t _C1$$

Samme løsning som i d).

Det giver samme løsning i c) og d), da den partikulære løsning samt den homogene løsning alle $\in U$!

EXTRA 1

Antag nu, at basen $e^t \notin U$. Dvs. $U = \text{span}\{e^{-t}, 1, e^{2t}\}$.

c)

Afbildningsmatricen bliver så (idet 3. søjle fjernes):

$$vFvI := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} :$$

▼ **d)**

$$\text{LinearSolve}(vFvI, q) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. løsningen i U er: $\langle 3, -2, 1 \rangle$ eller $x(t) = 3 \cdot e^{-t} - 2 + e^{2 \cdot t}$

Der er altså kun én løsning i U .

▼ **e)**

Maples dsolve giver naturligvis samme løsning som før.

$$\text{dsolve}(f(x(t)) = -6 \cdot e^{-t} + e^{2 \cdot t} + 2) = x(t) = 3 e^{-t} - 2 + e^{2t} + e^t _CI$$

Nu giver d) og e) **ikke** samme løsning!

Årsag: den homogene løsning ligger ikke i U .

▼ EXTRA 2

Antag igen, at $U = \text{span}\{e^{-t}, 1, e^t, e^{2 \cdot t}\}$.

Antag også, at højresiden nu hedder e^t .

$q2 := \langle 0, 0, 1, 0 \rangle :$

▼ **c)**

$$\text{LinearSolve}(vFv, q2)$$

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

Dvs. der er ingen løsning nu, fordi $e^t \notin f(U)$!

Der er altså ingen partikulær løsning i U .

▼ **d)**

$$\text{dsolve}(f(x(t)) = e^t) = x(t) = (t + _CI) e^t$$

Dvs. løsningen i $C^\infty(\mathbb{R})$ er $x(t) = (t + c) \cdot e^t$ hvor $c \in \mathbb{R}$.

Nu giver d) og e) **ikke** samme løsning!